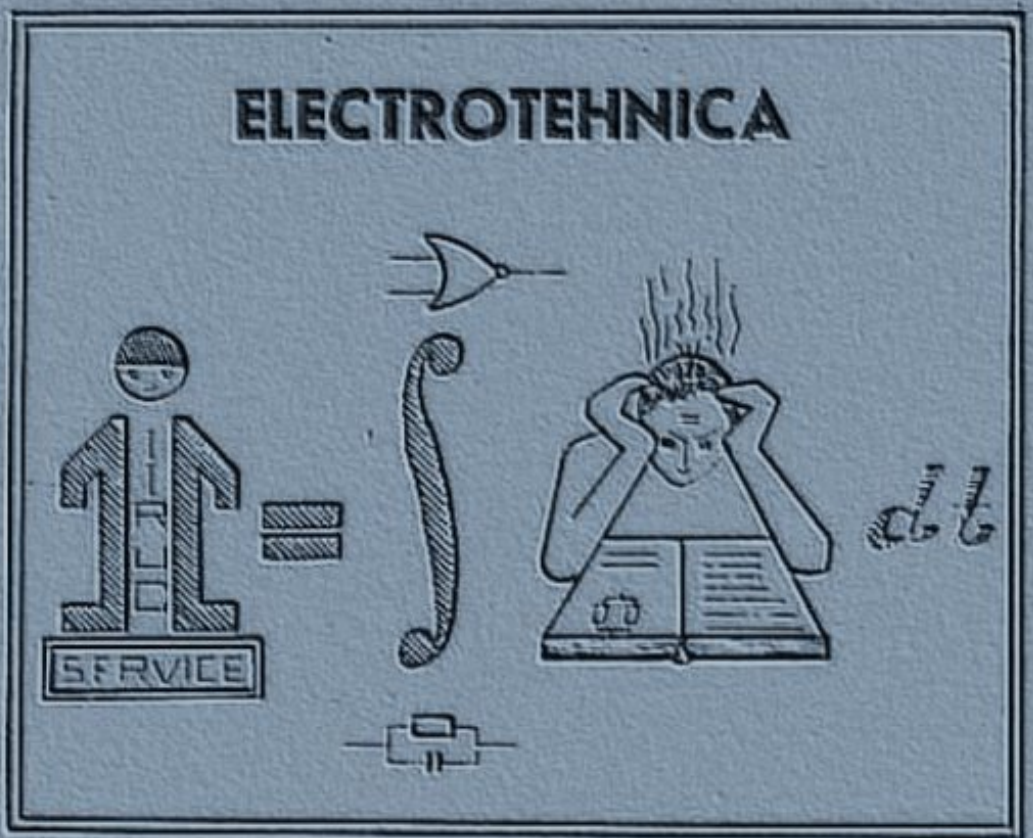
INTREPRINDEREA PENTRU INTREȚINEREA
ȘI REPARAREA UTILAJELOR DE CALCUL
ȘI DE ELECTRONICĂ PROFESIONALĂ
I. I. R. U. C.

ELECTROTEHNICA



1984

ELECTROTEHNICA

Elaborat : ing. Doncescu Dumitru

1984

CAPITOLUL 1

INTRODUCERE

Fenomenele electrice şi magnetice se cunoşteau din antichitate. Aprofundarea cunoştinţelor legate de aceste fenomene s-a făcut mult mai tîrziu. Abia la sfîrşitul secolului al optsprezecelea (la 1785), Ch. A. Coulomb, folosind balanţa de torsiune, a determinat interacţiunile mecanice dintre mici corpuri electrizate.

Un avînt în dezvoltarea studiului şi cercetării electromagnetismului s-a făcut simţit la 1800, cînd fizicianul A. Volta a construit prima pilă electrică.

Cu ajutorul pilei electrice s-a obţinut curentul electric de conducţie. Astfel, s-a permis studiul fenomenelor de electroliză şi celelalte efecte ale curentului electric.

Fenomenul inducţiei electromagnetice descoperit de M. Faraday în 1831 a constituit baza aplicaţiilor tehnice de producere, transport şi utilizare a energiei electromagnetice.

Mai tîrziu, în 1873, J.C. Maxwell aprofundează şi elaborează teoria cîmpului electromagnetic.

Verificată prin experienţă de H. Hertz în 1888, teoria cîmpului electromagnetic avea să fie ulterior transpusă în aplicaţii practice şi să se finalizeze în transmiterea de informaţii prin intermediul undelor electromagnetice.

Un rol important în progresul studierii şi cercetării fenomenelor electromagnetice l-au avut şi oamenii de ştiinţă români: N. Vasilescu Karpen, C. Budeanu, St. Procopiu, P. Andronescu şi R. Răduleţ.

Constantin Budeanu a colaborat activ la lucrările CEI (Comisia Electrotehnică Internaţională) încă dinainte de al doilea război mondial, iar în 1964, academicianul Remus Răduleţ a fost ales preşedinte al Comisiei Electrotehnice Internaţionale.

1.1. Noţiuni de calcul vectorial

In prezentarea fenomenelor electrice şi magnetice din acest manual, se vor folosi mărimi şi operaţii de calcul vectorial care se cer a fi clarificate de la început.

Mărime scalară sau scalar este o proprietate fizică ce este caracterizată printr-un singur număr. De exemplu: masa, timpul, energia, puterea, sarcina electrică, curentul electric.

Vectorul este o mărime caracterizată printr-o valoare numerică, o direcţie şi un sens în lungul acestei direcţii.

De exemplu: forţa, viteza, acceleraţia, drumul, intensitatea cîmpului electric, inducţia magnetică.

Reprezentarea grafică se face cu ajutorul unui segment de dreaptă de lungime proporţională cu valoarea numerică, avînd o direcţie şi o săgeată pe direcţie care semnifică sensul vectorului.

Vectorul se notează cu ajutorul unei litere prevăzută deasupra cu o bară (Exemplu: viteza $\bar{V}$).

Dacă vectorul se proiectează pe cele trei axe de coordonate rectangulare ox, oy şi oz, se obţin componentele vectorului pe cele trei axe. Dacă vectorul este $\bar{A}$, atunci cele trei componente sînt: Ax, Ay şi Az.

Componentele vectorului sînt mărimi scalare. (Fig. 1.1)

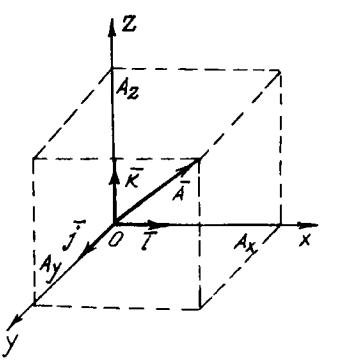


Fig. 1.1. Vectorul $\bar{A}$, proiecţiile şi vectorii unitari $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$.

Celor trei axe, li se pot asocia vectori unitari sau versori ortogonali după cum urmează:

- axei ox, versorul $\bar{i}$;
- axei oy, versorul $\bar{j}$;
- axei oz, versorul $\bar{k}$.

Cu ajutorul vectorilor unitari, vectorul $\bar{A}$ se poate prezenta şi sub forma:

$$\bar{A} = Ax\,\bar{i} + Ay\,\bar{j} + Az\,\bar{k} \qquad (1.1)$$

Modulul unui vector este valoarea lui numerică.

Se notează fără bară:

$$|\bar{A}| = A \qquad (1.2)$$

iar pentru versori : $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$

Cîmp de scalari. Cîmp de vectori. Dacă într-un domeniu fiecare punct este caracterizat printr-o mărime scalară, domeniul constituie un cîmp de scalari. In schimb, dacă fiecare punct dintr-un domeniu este caracterizat printr-un vector, domeniul constituie un cîmp de vectori.

Produsul scalar a doi vectori. Se numeşte produs scalar a doi vectori $\bar{A}$ şi $\bar{B}$, expresia:

$$\bar{A}\bar{B} = AB\cos\alpha \qquad (1.3)$$

în care A şi B sînt modulele vectorilor $\bar{A}$ şi $\bar{B}$, adică:

$$A = |\bar{A}| \quad \text{iar} \quad B = |\bar{B}|$$

Unghiul α este unghiul format de cei doi vectori $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ (fig. 1.2).

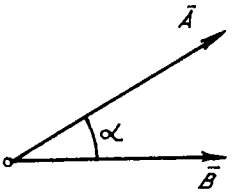


Fig. 1.2. Vectorii $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ formează unghiul α.

Se observă că produsul scalar a doi vectori este o mărime scalară. (AB cos α este un scalar).

Produsul scalar este comutativ, adică:

$$\bar{A}\bar{B} = \bar{B}\bar{A} \tag{1.4}$$

Produsul vectorial a doi vectori. Se notează $\bar{A} \times \bar{B}$ şi este prin definiţie tot un vector, $\bar{C}$, de modul AB sin α (Fig. 1.3), adică:

$$\bar{C} = \bar{A} \times \bar{B}$$

în care:
$$|\bar{C}| = AB \sin \alpha. \tag{1.5}$$

Direcţia vectorului $\bar{C}$ este normală pe planul format de vectorii $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ iar sensul vectorului $\bar{C}$ pe această direcţie se determină după regula burghiului drept (Fig. 1.3 a şi b).

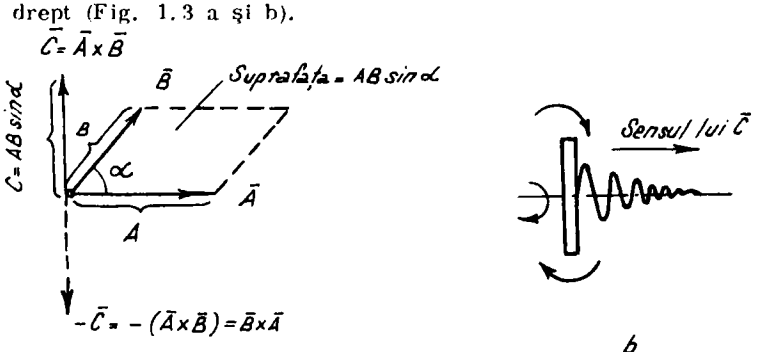


Fig. 1.3 a) Produsul vectorial $\bar{C} = \bar{A} \times \bar{B}$. b) Regula burghiului drept.

In ce constă regula burghiului drept ? Se consideră originea comună a vectorilor $\bar{A}$ şi $\bar{B}$ ca fiind fixă. Se roteşte, în planul vectorilor, vîrful primului vector $\bar{A}$ în spre vectorul $\bar{B}$, pe drumul cel mai scurt. Acestui sens de rotire al vectorului $\bar{A}$ către $\bar{B}$, îi corespunde după regula burghiului drept un sens pentru vectorul C, normal pe planul în care se face rotirea.

Produsul vectorial nu este comutativ, adică:

$$\bar{A} \times \bar{B} = - (\bar{B} \times \bar{A}) \qquad (1.6)$$

Produsul scalar şi vectorial pentru versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ determină următoarele rezultate:

$$\bar{i} \cdot \bar{i} = 1.1. \cos 0^{o} = 1 ; \quad \bar{j} \cdot \bar{j} = 1 ; \quad \bar{k} \cdot \bar{k} = 1;$$

$$\bar{i} \cdot \bar{j} = 1.1. \cos 90^{o} = 0; \quad \bar{j} \cdot \bar{k} = 0 ; \quad \bar{k} \cdot \bar{i} = 0;$$

iar produsul vectorial

$$\bar{i} \times \bar{i} = 1.1 \sin 0^{o} = 0 ; \bar{j} \times \bar{j} = 0 ; \bar{k} \times \bar{k} = 0 ;$$

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k} ; \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i} ; \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j} .$$

1.2. Simbolurile mărimilor fizice

Mărimi geometrice

l = lungime	s - spaţiu
r = rază	A - suprafaţă
λ = lungime de undă	V - volum

Timp - Viteză

t - timp	ω - viteză unghiulară
T - perioadă	f - frecvenţă
τ - constantă de timp	ω - pulsaţie ($2\pi f$)
n - turaţie	v - viteză
	a - acceleraţie

Forţă - Masă

F - forţă

G - greutate

p - presiune

m - masă.

Energie. Putere. Căldură

W - energie

Θ - temperatura în ^{o}C

P - putere

T - temperatura absolută în ^{o}K

Q - cantitate de căldură

η - randament

Mărimi electrice

C - capacitate

ε - permitivitatea absolută

$\vec{D}$ (D) - inducţia electrică

ε_o - permitivitatea vidului

$\vec{E}$ (E) intensitatea cîmpului electric

ε_r - permitivitatea relativă

E - tensiune electromotoare (t.e.m.)

ρ - rezistivitatea electrică

G - conductanţă electrică

V - potenţial electric

I - intensitatea curentului electric

ψ - flux electric

q - sarcina electrică punctuală

R - rezistenţă electrică

U - tensiune electrică (cădere de tensiune)

Mărimi magnetice

$\vec{B}$ (B) - inducţia magnetică

χ_m - susceptivitate magnetică

$\vec{H}$ (H) - intensitatea cîmpului magnetic

μ - permeabilitate absolută

L - inductivitate

μ_o - permeabilitatea vidului

M - inductivitate mutuală

μ_r - permeabilitate relativă

Rm - reluctanţă magnetică

Φ - flux magnetic

Um - tensiune magnetică

Umm - tensiune magnetomotoare

CAPITOLUL 2

ELECTROSTATICA

2.1. Fenomene electrice. Sarcina electrică. Cîmp electric. Intensitatea cîmpului electric în vid

Din timpuri îndepărtate s-a observat că mici corpuri sînt atrase de alte corpuri frecate în prealabil cu o bucată de postav. Rezultatul acestor experienţe făcute de-a lungul timpului şi în diverse locuri de pe pămînt s-au repetat.

Spre exemplu, cu ajutorul unei vergele de sticlă frecată întîi cu o bucată de mătase, se poate atrage un mic corp pe care-l vom numi corp de probă şi pe care îl vom descrie în continuare. Spunem că acest fenomen care apare în condiţiile experienţei noastre este un fenomen electric; vergeaua de sticlă şi mătasea s-au electrizat şi acestea se află într-o nouă stare, stare de electrizare.

In jurul acestor corpuri, s-a creat un cîmp electric.

S-a constatat că sînt şi alte moduri în care se creează cîmp electric:

- acţiuni mecanice exercitate asupra unor corpuri;
- încălzirea anumitor corpuri;
- contact cu anumite corpuri deja electrizate;
- iradierea cu raze Roentgen sau raze ultraviolete;
- apropierea de un corp electrizat;
- variaţia în timp a unui cîmp magnetic (cîmpul magnetic va fi definit ulterior).

Explorarea cîmpului electric se face cu ajutorul corpului de probă realizat dintr-o bobiţă de soc, învelită cu o foiţă metalică foarte subţire.

Corpul de probă îndeplineşte următoarele condiţii:

- prin contact cu vergeaua de sticlă sau bucata de mătase obţine o stare de electrizare;

- pentru a nu modifica starea de electrizare a cîmpului supus explorării, starea de electrizare a sa trebuie să fie slabă;

- starea sa de electrizare să fie invariabilă;

- firul de suspendare să fie foarte subţire, greutate neglijabilă şi izolant.

Metalizarea corpului de probă se face pentru ca asupra lui să acţioneze numai forţe (să nu apară cuplu).

Prin explorarea cîmpului, se constată prezenţa forţei de natură electrică $\bar{F}e$ exercitată de cîmp asupra corpului de probă în fiecare punct al domeniului (Fig. 2. 1.).

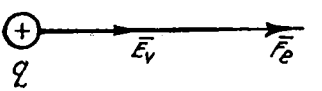


Fig. 2. 1. Forţa de natură electrică $\bar{F}e$.

Forţa este egală cu produsul dintre o mărime scalară ce caracterizează starea de electrizare a micului corp de probă şi care se numeşte sarcină electrică (notată cu q) şi o mărime vectorială ce caracterizează în punctul respectiv (local) cîmpul electric în vid şi care se numeşte intensitatea cîmpului electric în vid (notă cu $\bar{E}v$).

Relaţia se scrie: $$\bar{F}e = q\ \bar{E}v \qquad (2.1)$$

Interesantă a fost constatarea potrivit căreia într-un punct dat, la stări de electrizare transmise corpului de probă de la vergeaua de sticlă respectiv de la bucata de mătase, forţa electrică a avut sensuri diferite pe aceiaşi direcţie. Concluzia trasă în urma experienţei a fost că sarcina electrică poate avea semne opuse. S-a convenit: corpul de probă are sarcină pozitivă cînd i se transmite starea de electrizare de la vergeaua de sticlă şi are sar-

cină negativă atunci cînd prin contact starea de electrizare o primeşte de la bucata de mătase.

S-a mai convenit sensul intensităţii cîmpului electric: sensul de la sarcina pozitivă către sarcina negativă. Linia continuă tangentă în fiecare punct la direcţia locală a vectorului intensitatea cîmpului electric, se numeşte linie de cîmp electric (Fig. 2. 2).

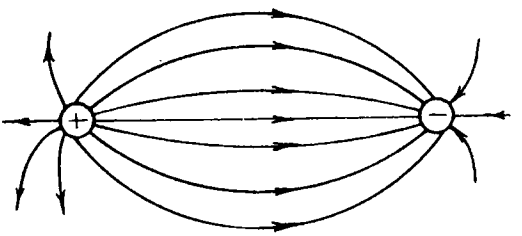


Fig. 2. 2. Liniile de cîmp electric.

Referitor la noţiunea de vid, trebuie înţeles, că reprezintă o stare limită către care se tinde cînd densitatea de masă a corpurilor tinde către zero.

Din formula (2. 1) se deduce că forţa din cîmp electric este omoparalelă cu intensitatea cîmpului electric cînd sarcina electrică asupra căreia acţionează este pozitivă (Fig. 2. 3) şi antiparalelă în cazul că această sarcină este negativă (Fig. 2. 4).

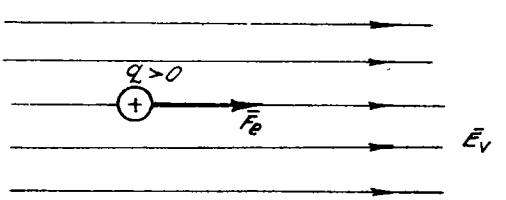


Fig. 2. 3. Sensul forţei în cazul q > 0.

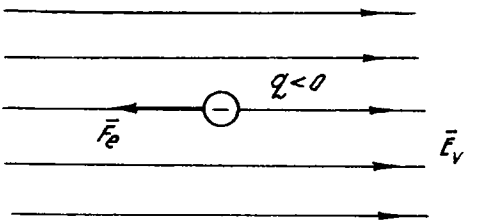


Fig. 2.4. Sensul forţei în cazul $q < 0$.

2.1.1. Conductori, semiconductori, izolanţi

Experimental se constată că orice corp pus în contact cu un corp electrizat este respins de acesta. Timpul de respingere diferă de la corp la corp şi variază de la microsecunde pînă la ore sau zile.

Corpul la care acest timp este de ordinul microsecundelor $(1\mu s = 10^{-6} s)$ poartă denumirea de conductor.

Cînd acest timp este de ordinul secundelor, atunci corpul este semiconductor. In fine, corpul care posedă un timp de respingere de ordinul orelor sau zilelor se numeşte izolant.

2.1.2. Formula lui Coulomb

In 1785, Charles A.Coulomb folosind balanţa electrică de torsiune a determinat o expresie pentru forţele care se exercită între două corpuri de probă practic punctiforme, încărcate cu sarcini electrice q_1 şi q_2, plasate în vid la distanţa R.

Vectorial expresia se scrie în cazul respingerii dintre sarcini ($q_1 > 0$; $q_2 > 0$ sau $q_1 < 0$; $q_2 < 0$) astfel (Fig. 2.5):

$$-\bar{F}_{12} = \bar{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \, q_2}{R^2} \, \bar{u}_R \, . \qquad (2.2)$$

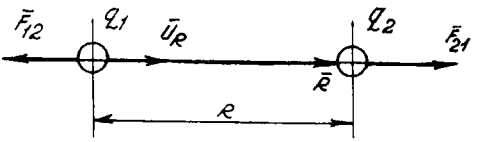


Fig. 2.5. Forţele electrice de respingere.

Cînd sarcinile electrice sînt de semn contrar ($q_1 > 0$; $q_2 < 0$ sau $q_1 < 0$; $q_2 > 0$) forţa este de atracţie şi are expresia (Fig. 2.6):

$$\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \, q_2}{R^2} \bar{u}_R \qquad (2.2a)$$

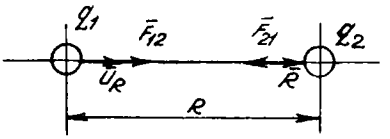


Fig. 2.6. Forţele electrice de atracţie

în care: $\bar{u}_R = \frac{\bar{R}}{R}$ reprezintă versorul unitar al vectorului $\bar{R}$;

$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \, 9.10^9}$ $\frac{\text{Farad}}{\text{metru}}$ (Sistemul Internaţional SI) reprezintă permitivitatea vidului.

Scalar, relaţiile de mai sus se exprimă pentru vid astfel:

$$F = \frac{q_1 \, q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \qquad (2.2b)$$

2.1.3. Cîmpul electric al unei sarcini electrice punctuale

Din formula lui Coulomb, s-a determinat forţa de natură electrică exercitată de sarcina punctuală q_1 asupra sarcinii punctuale q_2 (presupunem, $q_1 > 0$ şi $q_2 > 0$) (Fig. 2.7).

$$F_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R^2} \bar{u}_R$$

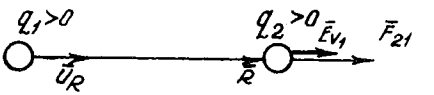


Fig. 2. 7.

Dar sarcina q_2, plasată în cîmpul electric $\bar{E}_{v1}$ produs de sarcina q_1, este supusă forţei de natură electrică: $\bar{F}_e = q_2 \bar{E}_{v1}$

Aceste forţe sînt egale dar sînt altfel exprimate.

Deci $$\bar{F}_{21} = \bar{F}e$$

sau $$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R^2} \bar{u}_R = q_2 \bar{E}_{v1} .$$

Din această relaţie, rezultă expresia cîmpului electric în vid la distanţa R de sarcina electrică q_1:

$$\bar{E}_{v1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{R^2} \bar{u}_R$$

sau în cazul general,

$$\bar{E}_v = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2} \bar{u}_R . \qquad (2.3)$$

In cazul sarcinii electrice punctuale, rezultă că intensitatea cîmpului electric este radială şi scade invers proporţional cu patratul distanţei. In cazul sarcinii pozitive ($q > 0$), sensul cîmpului electric este spre exterior (Fig. 2. 8) iar cînd sarcina este negativă ($q < 0$), sensul cîmpului electric este invers (Fig. 2. 9).

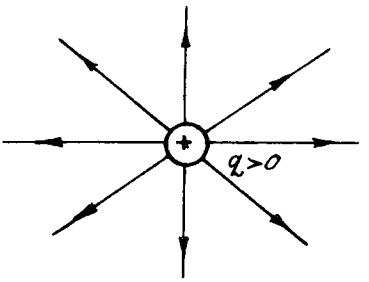


Fig. 2.8. Sensul cîmpului electric spre exterior ($q > 0$)

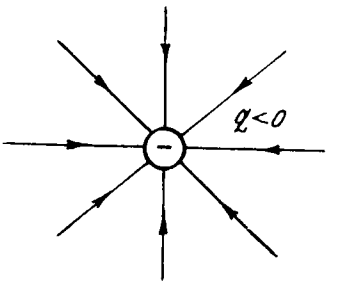


Fig. 2.9. Sensul cîmpului electric spre interior ($q < 0$)

2.1.4. Unităţi de măsură

Unităţile de măsură indicate vor corespunde Sistemului Internaţional SI, adoptat legal în ţara noastră.

In acest sistem, unitatea de măsură pentru sarcină electrică se numeşte coulomb şi se notează C. Din relaţia 2.2b) se determină că între două sarcini electrice încărcate cu sarcina electrică de 1 coulomb fiecare, plasate la distanţa de 1 metru în vid, se exercită forţa de 9.10^9 newtoni (N).

Unitatea de măsură a intensităţii cîmpului electric se numeşte volt pe metru (V/m). Din (2.1), rezultă că în vid într-un punct din cîmpul electric, intensitatea acestui cîmp are valoarea de un volt pe metru cînd asupra sarcinii electrice de un coulomb plasată în acest punct, se exercită forţa egală cu un newton.

Din considerente practice, pentru sarcina electrică, se folosesc sub multiplii coulombului. Aceştia sînt: milicoulombul (1 m C = 10^{-3}C) şi microcoulombul (1 μC = 10^{-6}C).

2.2. Tensiunea şi potenţialul electric

Un corp aflat în stare de electrizare cu sarcina electrică q', lăsat liber într-un cîmp electric creat de o sarcină punctuală q, se va deplasa radial în lungul unei linii de cîmp sub acţiunea forţei de natură electrică $\overline{F}_e$ (Fig. 2.10).

Din cunoştinţele anterioare referitoare la lucrul mecanic, se ştie că acesta se poate determina atunci cînd se cunoaşte forţa şi drumul pe care se deplasează corpul sub influenţa acestei forţe.

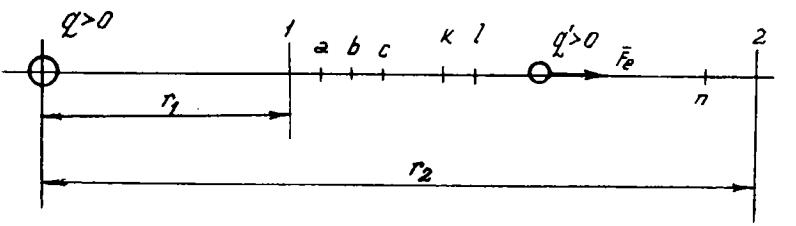


Fig. 2.10. Forţa electrică $\bar{F}e$ deplasează sarcina electrică q'.

Presupunem că sub acţiunea forţei de natură electrică $\bar{F}_e$, sarcina electrică q' s-a deplasat din 1 în 2.

In punctul 1, modulul forţei electrice este:

$$Fe_1 = \frac{q\ q'}{4\pi\varepsilon_o r_1^2}$$

iar în 2

$$Fe_2 = \frac{q\ q'}{4\pi\varepsilon_o r_2^2} .$$

Să calculăm lucrul mecanic efectuat de forţa electrică atunci cînd sarcina se deplasează din 1 în 2.

Pentru că forţa nu rămîne constantă, scade cu patratul distanţei, vom calcula lucrul mecanic pe mici porţiuni. De-a lungul fiecărei porţiuni, se consideră că forţa este constantă. In final, se obţine lucrul mecanic dintre 1 şi 2, pe care-l notăm L_{12}, ca suma lucrurilor mecanice elementare de pe fiecare porţiune în parte.

Considerăm porţiunea de drum dintre k şi l.

Modulele forţelor electrice la capete vor fi în punctul k

$$F_{ek} = \frac{q\ q'}{4\pi\varepsilon_o r_k^2}$$ iar în punctul ℓ va fi

$$Fe_l = \frac{q\ q'}{4\pi\varepsilon\ r_\ell^2} .$$

Pentru că punctele k şi l sînt foarte apropiate, putem considera că

$$F_{ek} = F_{el}$$

şi că

$$r_k^2 = r_k \, r_l \, .$$

Deci: $$F_{ek} = \frac{q \, q'}{4 \pi \varepsilon_0 r_k \, r_l} = F_{el} \, .$$

Dar lucrul mecanic elementar efectuat între k şi l este

$$\Delta L = F_{ek} \, (r_l - r_k) \, .$$

Se obţine : $$\Delta L = \frac{q \, q'}{4 \pi \varepsilon_0 r_k r_l} (r_l - r_k) = \frac{q \, q'}{4 \pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_l} \right) .$$

Lucrul mecanic total pe drumul 1.2 este

$$L_{12} = \sum_1^2 \Delta L = \sum_1^2 \frac{q \, q'}{4 \pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_l} \right) = \frac{q \, q'}{4 \pi \varepsilon_0} \sum_1^2 \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_l} \right)$$

sau $$L_{12} = \frac{q \, q'}{4 \pi \varepsilon_0} \left[\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_a} \right) + \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) + \ldots . + \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_l} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_2} \right) \right] .$$

Se observă că se reduc anumiţi termeni şi obţinem:

$$L_{12} = \frac{q \, q'}{4 \pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \qquad (2.4)$$

în care r_1 respectiv r_2 sînt distanţele punctelor 1 şi 2 faţă de sarcina q.

Această relaţie se poate pune sub forma

$$\frac{L_{12}}{q'} = \frac{q}{4 \pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \qquad (2.4a)$$

care reprezintă lucrul mecanic specific, numit <u>tensiune electrică</u>, dintre punctele 1 şi 2 şi notată cu U_{12}, adică:

$$U_{12} = \frac{L_{12}}{q'} = \frac{q}{4 \pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) . \qquad (2.5)$$

Tensiunea U_{12} este dată de diferenţa a doi termeni: V_1 şi V_2

în care $$V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} \text{ şi } V_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}.$$

Termenul de forma lui V_1 sau V_2 se notează cu V, în cazul general, şi se numeşte potenţial electrostatic.

Se demonstrează că tensiunea electrică U_{12} nu depinde de forma drumului dintre 1 şi 2.

Tensiunea electrică U_{12}, exprimată în funcţie de cele două potenţiale, capătă forma:

$$U_{12} = V_1 - V_2 \qquad (2.6)$$

In cazul în care punctul 2 se confundă cu punctul 1, drumul este închis.

Se demonstrează că, de-a lungul unui drum închis, tensiunea electrică este egală cu zero. Notînd drumul închis cu litera grecească Γ (gama), se scrie

$$U_\Gamma = 0 \quad . \qquad (2.6 \text{ bis})$$

Această relaţie reprezintă teorema potenţialului electrostatic.

Dacă punctul 2 se depărtează la infinit, tensiunea electrică U_{12} este egală cu potenţialul V_1 întrucît V_2 devine egal cu zero:

$$U_{1\infty} = \frac{L_{1\infty}}{q'} = V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} \qquad (2.7)$$

Din această expresie se poate defini noţiunea de potenţial electrostatic V.

Potenţialul electrostatic V, dintr-un punct oarecare din cîmpul electric, reprezintă raportul dintre lucrul mecanic efectuat de forţele electrice ale cîmpului pentru deplasarea sarcinii electrice din acest punct la infinit şi sarcina electrică respectivă.

Tensiunea electrică U_{12}, egală cu diferenţa potenţialelor V_1 şi V_2, se numeşte şi diferenţă de potenţial.

In cazul cîmpului electric uniform şi omogen, intensitatea cîmpului electric este aceeaşi în toate punctele cîmpului iar tensiunea dintre 1 şi 2 va fi:

$$U_{12} = \frac{L_{12}}{q'} = \sum_{1}^{2} E_v \Delta l = E_v l_{12} \qquad (2.8)$$

Cîmpul uniform şi omogen se reprezintă grafic prin linii drepte, paralele şi la aceeaşi distanţă. Drumul pe care se calculează lucrul mecanic este reprezentat de segmentul de dreaptă l_{12} (Fig. 2.11).

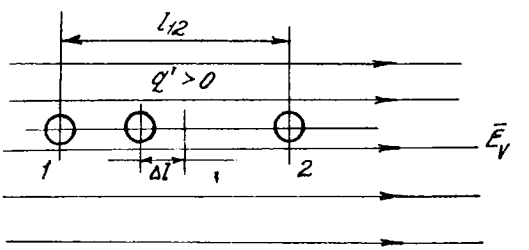


Fig. 2.11. Cîmp electric uniform şi omogen.

Dacă se consideră sarcina electrică egală cu unitatea, se poate defini tensiunea electrică astfel:

Tensiunea electrică dintre două puncte, situate într-un cîmp electrostatic (invariabil în timp), este prin definiţie egală cu lucrul mecanic efectuat de forţele electrice pentru deplasarea unităţii de sarcină electrică pozitivă între cele două puncte.

2.2.1. Unităţi de măsură

In sistemul de unităţi S I unitatea de măsură a tensiunii electrice (diferenţei de potenţial) şi a potenţialului electrostatic se numeşte volt (V).

Precizare. Pînă acum şi în continuare, se notează cu **simboluri** majuscule mărimile constante în timp şi cu minuscule, cele variabile în timp. Exemplu:

Tensiunea electrică constantă în timp se notează cu U şi variabilă cu u.

2.2.2. Aplicaţii

1. Să se determine ecuaţia mişcării $s = f(t)$ şi ecuaţia vitezei $v = f(t)$, pentru particula cu sarcină electrică q, într-un cîmp electric uniform şi omogen de intensitate $\bar{E}$. Se consideră viteza iniţială **a particulei** $V_o = 0$ **şi spaţiul** iniţial $s_o = 0$ (Fig. 2.12).

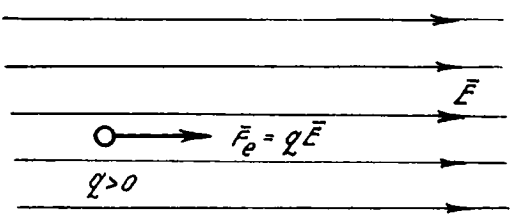


Fig. 2.12.

Rezolvare.

Cîmpul electric omogen se reprezintă grafic prin linii de cîmp, ale intensităţii cîmpului electric $\bar{E}$, paralele şi echidistante.

Pentru determinarea ecuaţiilor $s = f(t)$ şi $v = f(t)$, se scrie legea dinamicii cunoscută din mecanică:

$$\bar{F} = m\bar{a} .$$

In acest caz, forţa $\bar{F}$ este forţa de natură electrică:

$$\bar{F}_e = q\bar{E} .$$

Această forţă acţionează asupra corpului.

Prin urmare se poate scrie

$$\overline{F}_e = \overline{F}$$

sau

$$q\,\overline{E} = m\bar{a}$$

prin care datele noi introduse sînt:

m - masa particulei;

ā - acceleraţia imprimată corpului de forţa $\overline{F}_e$.

Tot din această relaţie, rezultă că mişcarea particulei se face în direcţia şi sensul cîmpului electric. Este o mişcare rectilinie Se poate scrie în modul $q\,E = ma$.

Rezultă acceleraţia $a = \frac{q\,E}{m}$.

Cum a este constantă, mişcarea particulei în cîmp este uniform accelerată.

Ecuaţia vitezei este de forma:

$$v\,(t) = v_o + at = \frac{q\,E}{m}t.$$

Ecuaţia de mişcare este

$$s\,(t) = s_o + v_o\,t + \frac{a\,t^2}{2} = \frac{q\,E}{2\,m}t^2$$

cu condiţiile iniţiale date prin problemă:

$$v\,(0) = v_o = 0\ ;$$
$$s\,(0) = s_o = 0\ .$$

In Fig. 2.13, este reprezentarea grafică.

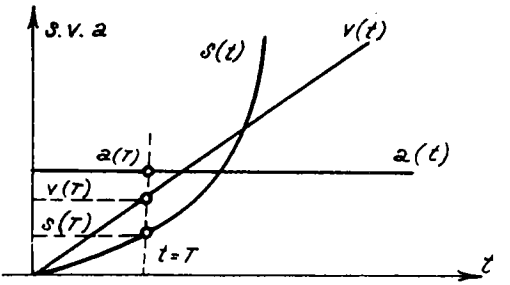


Fig. 2.13.

Din grafic se poate determina la orice moment t = T acceleraţia, viteza sau spaţiul parcurs de particulă.

2. Se consideră o diodă electronică cu vid (Fig. 2.14) avînd tensiunea anodică U_A = 200 V, distanţa dintre catod şi anod d = 10 cm. Admiţînd că electronii au viteză nulă la emisia de pe catod, se cere timpul T în care un electron străbate spaţiul catod - anod şi viteza v (T) cu care soseşte pe anod.

Rezolvare. Cu rezultatele din prima problemă avem

$$d = s\,(T) = \frac{q\,E}{2\,m}\,T^2 \quad \text{sau}$$

$$T = \sqrt{\frac{2\,md}{qE}} = \sqrt{\frac{2.9{,}1\cdot10^{-31}\cdot\ 0{,}1}{1.6.10^{-19}.\ 2000}}\ (s) = 24{,}8.10^{-9}\ s = 24{,}8\ ns$$

în care:

- masa electronului $m = m_e = 9{,}1.10^{-28}\ g = 9{,}1.10^{-31}$ kg;
- sarcina electronului $q = q_e = 1{,}6.10^{-19}$ C;

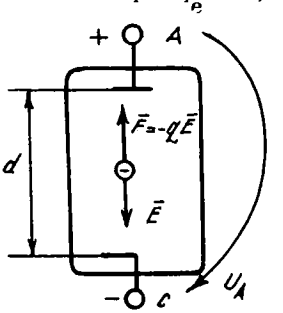


Fig. 2.14.

- intensitatea cîmpului $E = \frac{U_A}{d} = \frac{200}{10.10^{-2}} = 2\ 000\ V/m$

şi viteza $v\ (T) = \frac{q\ E}{m}\ T = \frac{1,6.10^{-19}.2000}{9,1\ .\ 10^{-31}}\ 24,8\ .\ 10^{-9} = 0,84\ .10^{7}\ m/s$.

S-a neglijat modificarea masei în funcţie de viteză deoarece:

$$m = \frac{m_o}{1 - (\frac{v_o}{c})^2} = \frac{m_o}{1 - (\frac{0,84\ .\ 10^7}{3\ .\ 10^8})^2} \cong m_o$$

în care:

c = viteza luminii = $3\ .\ 10^8$ m/s;

m = masa corpului pentru viteza v;

m_o = masa corpului pentru viteza v_o;

$v_o = v\ (T) = 0,84\ .\ 10^7$ m/s.

2.3. Cîmpul electrostatic în vid al unor repartiţii de sarcini. Superpoziţia

S-a demonstrat anterior, că intensitatea cîmpului electric în vid produs de un corp punctual, încărcat cu sarcina electrică q, la distanţa R, este egală cu:

$$Ev = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\ \frac{q}{R^2}\ \bar{u}_R \quad \text{(vezi 2.3)}\ .$$

Dacă în vid sînt n sarcini, atunci intensitatea cîmpului electric în vid, rezultant într-un punct oarecare P, este dată de suma geometrică (vectorială) a intensităţilor pe care fiecare corp încărcat le-ar produce separat în punctul considerat (Fig. 2.15):

$$\bar{E}_v = \bar{E}_{v1} + \bar{E}_{v2} + \ .\ .\ .\ + \bar{E}_{vn}\ . \qquad (2.9)$$

Enunţul de mai sus reprezintă teorema superpoziţiei.

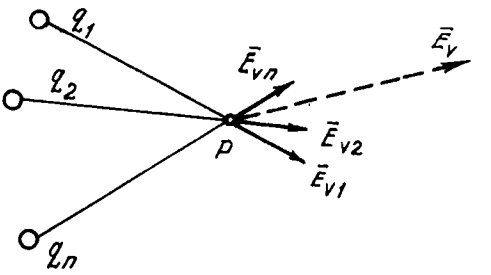


Fig. 2.15. Cîmpul electric rezultant $\bar{E}_v$.

Această teoremă se aplică şi în cazul altor repartizări de sarcină electrică.

In natură, sarcina electrică poate fi repartizată pe fire, suprafeţe sau sub formă de sarcini de volum. Caracterizarea locală se face în fiecare caz în parte cu ajutorul unei densităţi de linie, suprafaţă sau volum. Pentru o repartizare uniformă se defineşte:

Densitatea sarcinii de linie ρ_l:

$$\rho_l = \frac{q}{l} \left(\frac{\text{Coulomb}}{\text{m}} \right) \tag{2.10}$$

iar sarcina electrică totală de pe porţiunea de lungime l este

$$q = \rho_l \, l \quad (C). \tag{2.10a}$$

Densitatea sarcinii de suprafaţă ρ_s:

$$\rho_s = \frac{q}{A} \left(\frac{\text{Coulomb}}{\text{m}^2} \right) \tag{2.11}$$

iar sarcina electrică totală de pe suprafaţa A este

$$q = \rho_s \, A \, (C). \tag{2.11a}$$

Densitatea sarcinii de volum ρ_v:

$$\rho_v = \frac{q}{V} \quad \left(\frac{\text{Coulomb}}{m^3} \right) \tag{2.12}$$

iar sarcina electrică totală din volumul V este

$$q = \rho_v V \ (C) . \tag{2.12a}$$

In cazul că există toate tipurile de sarcină electrică: punctiformă, de linie, de suprafaţă şi de volum, atunci expresia cîmpului electric va fi obţinut prin superpoziţia cîmpurilor generate de fiecare sarcină electrică în parte.

2.3.1. Aplicaţie

In punctele A (a, 0) şi B (0, a) se află două corpuri punctuale cu sarcinile electrice q şi respectiv - 2 q. Să se determine intensitatea şi potenţialul cîmpului electric în origine O (0,0) (Fig. 2.16) .

Date numerice: a = 10 cm; q = 1 μC.

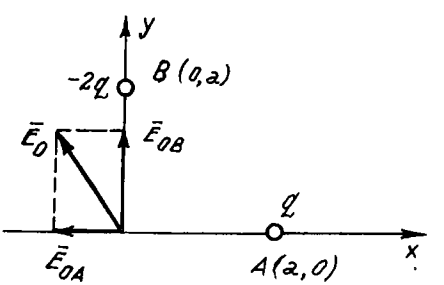


Fig. 2.16.

Rezolvare. In originea O, intensitatea cîmpului electric rezultant este suma vectorială a cîmpurilor produse de fiecare sarcină în parte.

$$E_O = \sqrt{E_{CA}^2 + E_{OB}^2} = \sqrt{\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\right)^2 + \left(\frac{-2q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\right)^2}$$

sau

$$E_O = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\sqrt{5} = \frac{9.10^9 . 10^{-6}}{(10^{-1})^2}\sqrt{5} = 90\sqrt{5} = 200\frac{V}{m}$$

Prin superpoziţia potenţialelor (se consideră potenţialul de la infinit, egal cu zero) se obţine:

$$V_O = V_A(a) + V_B(a) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

sau

$$V_O = -\frac{9.10^9 . 10^{-6}}{0,1} = -900\ V.$$

2.4. Cîmpul electrostatic în conductoare

Pentru a determina cîmpul electrostatic în conductoare este necesar să considerăm modelul structurii sale microscopice. Acest model constă din:

- o reţea ionică rigidă încărcată pozitiv;
- un fluid electronic încărcat negativ, distribuit în condiţii de omogenitate în aşa fel încît sarcinile electrice de semn contrar să se compenseze, determinînd o densitate de volum a sarcinii rezultante nulă. In Fig. 2.17 este reprezentată reţeaua ionică sub forma unui grilaj iar fluidul electronic prin puncte uniform repartizate în condiţii de omogenitate.

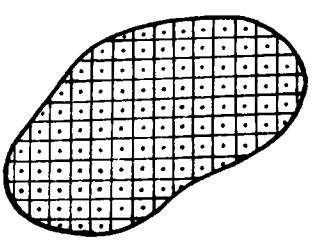


Fig. 2.17. Conductor omogen neaccelerat.

Imprimîndu-se conductorului o mişcare accelerată într-un anumit sens, urmare inerţiei, electronii sub acţiunea forţelor de inerţie se vor deplasa în sens opus, apărînd o regiune în care sarcinile electrice negative sînt în exces faţă de sarcinile pozitive. In regiunea opusă va apare un exces de sarcini pozitive.

Urmare grupării sarcinilor în cele două regiuni, se va naşte un cîmp electric orientat dinspre regiunea încărcată pozitiv spre regiunea încărcată negativ (Fig. 2. 18). Electronii vor fi supuşi acţiunii unor forţe electrice şi unor forţe neelectrice (Fig. 2. 19).

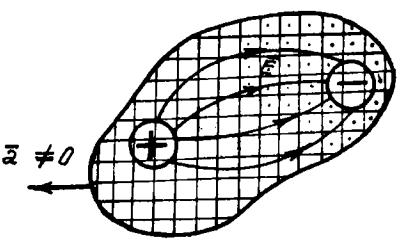


Fig. 2. 18. Conductor accelerat.

Cînd cele două forţe devin egale, electronul se opreşte:

$$\bar{F}_e + \bar{F}_{neel} = O \ . \qquad (2.13)$$

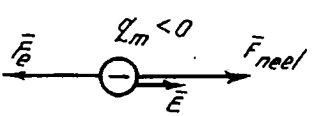


Fig. 2. 19. Forţele care se exercită asupra unui electron într-un conductor accelerat.

Această relaţie reprezintă condiţia de echilibru electrostatic.

Folosind relaţia (2.1.), condiţia de echilibru electrostatic se mai scrie:

$$q_e \vec{E} + \vec{F}_{neel} = O \qquad (2.13a)$$

sau

$$\vec{E} + \frac{\vec{F}_{neel}}{q_e} = O \qquad (2.13b)$$

în care: q_e - sarcina electronului.

În cazul în care conductorul este neaccelerat $\frac{\vec{F}_{neel}}{q_e} = O$ şi condiţia de echilibru electrostatic devine

$$\vec{E} = O \ , \qquad (2.14)$$

adică:

în regim electrostatic, intensitatea cîmpului electric este nulă în interiorul conductoarelor(omogene din punct de vedere fizic şi chimic) neaccelerate.

Consecinţe privind constatarea că în conductoare cîmpul electric $\vec{E}=O$.

1. In regim electrostatic, toate punctele unui conductor au acelaşi potenţial. Considerăm două puncte oarecare A şi B ale unui conductor (Fig.2.20).

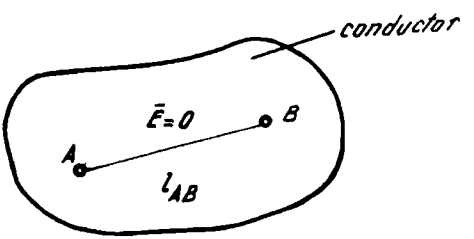


Fig.2.20. Două puncte A şi B
ale unui conductor în regim electrostatic.

Aplicînd formula (2.8), se obţine:

$$U_{AB} = E\ell_{AB} = V_A - V_B \qquad (2.15)$$

Ţinînd seama de faptul că, în regim electrostatic, cîmpul electric este nul în interiorul conductoarelor (căci în caz contrar, sub acţiunea forţelor electrice $F_e = q_e E$ ar exista o mişcare ordonată a electronilor ceeace nu este în acord cu regimul electrostatic), se poate scrie:

$$V_A - V_B = 0 \tag{2.15a}$$

sau

$$V_A = V_B \,, \tag{2.15b}$$

Cum alegerea punctelor A şi B a fost arbitrară, rezultă că toate punctele conductorului au în regim electrostatic acelaşi potenţial.

2. In regim electrostatic, în interiorul unei cavităţi situate într-un conductor, cîmpul electric este nul. Pentru demonstraţie admitem existenţa unei linii de cîmp electric în interiorul cavităţii (Fig. 2.21).

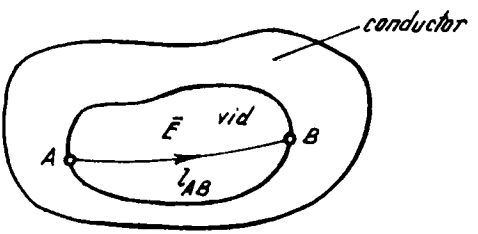


Fig. 2.21.

Cum punctele A şi B, situate la extremităţile liniei de cîmp (sînt puncte ale conductorului), au acelaşi potenţial:

$$V_A = V_B \text{ respectiv } V_A - V_B = 0,$$

din formula (2.15) se deduce că

$$E\ell_{AB} = 0. \tag{2.16}$$

Dar cum l_{AB} este diferit de zero, rezultă că în cavităţile conductoarelor nu există cîmp electric ($\bar{E} = 0$). Acesta se numeşte efectul de ecran al conductoarelor şi se foloseşte în mod frecvent în practică.

2.5. Cîmpul electric în substanţă

Din punct de vedere al proprietăţilor electrice, aşa cum s-a arătat anterior, materialele se împart în trei categorii: izolante (dielectrici), semiconductoare şi conductoare.

In conductoare există particule încărcate cu sarcină electrică care se pot deplasa liber în interiorul corpului, sarcini libere.

In dielectrici, particulele încărcate cu sarcină electrică nu se pot deplasa, ele fiind reţinute de forţele intramoleculare (forţe din interiorul moleculelor).

Aceste particule se mai numesc sarcini legate. Sub influenţa cîmpului electric, ele pot doar să-şi modifice poziţia relativă, adică, să sufere o mică deplasare; particulele încărcate pozitiv se vor deplasa în sensul cîmpului iar particulele încărcate negativ se vor deplasa în sens contrar cîmpului. Această schimbare a poziţiei reciproce a particulelor microscopice, încărcate pozitiv şi negativ, sub influenţa unui cîmp electric, se numeşte polarizarea dielectricului.

Din punctul de vedere al fenomenului de polarizare se disting două categorii de dielectrici: dielectrici nepolari şi dielectrici polari.

2.5.1. Dielectricii nepolari

conţin molecule neutre din punct de vedere electric, formate din particule pozitive şi negative, astfel aşezate încît, în stare nepolarizată, fiecare moleculă produce un cîmp electric nul în exteriorul său. Să considerăm cazul cel mai simplu al atomului de hidrogen format dintr-un nucleu încărcat pozitiv în jurul căruia se roteşte un electron încărcat negativ (Fig. 2.22 a).

Orbita electronului este simetrică faţă de nucleu, astfel că din punctul de vedere al producerii cîmpului electric, efectul electronului este acelaşi ca şi cînd sarcina lui ar fi concentrată în punctul în care se află nucleul.

Dacă se aplică un cîmp electric exterior, nucleul va fi deplasat în sensul cîmpului, iar orbita electronului se modifică astfel încît "centrul său de

acţiune" se schimbă şi nu mai coincide cu punctul în care se află nucleul (Fig. 2.22 b). Molecula va produce un cîmp electric în jurul său care va fi identic cu cîmpul produs de nucleu şi de o sarcină fictivă echivalentă electronului pe noua sa orbită (această sarcină fictivă este figurată punctat). Molecula

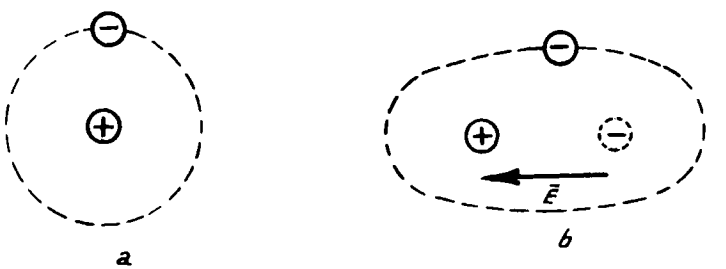


Fig. 2.22. Polarizarea dielectricilor nepolari.
a) molecula înainte de aplicarea cîmpului electric
b) molecula după aplicarea cîmpului electric.

este, deci, echivalentă cu un ansamblu de două sarcini electrice situate la distanţă mică una de alta. Acest ansamblu se numeşte dipol electric.

In general, un dipol electric este format din două sarcini + q şi - q, egale şi de semne contrare, situate în două puncte aflate la o distanţă l una de alta (Fig. 2.23).

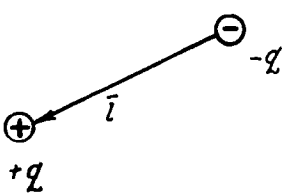


Fig. 2.23. Dipol electric

Se numeşte moment electric $\bar{p}$, al unui dipol electric, mărimea $\bar{p} = q\bar{l}$, unde vectorul $\bar{l}$ este dirijat de la sarcina negativă la sarcina pozitivă şi are mărimea egală cu distanţa dintre aceste sarcini. Se poate arăta că suma tuturor momentelor dipolilor electrici dintr-un corp este egală cu momentul electric al acelui corp.

Experimental se constată că momentul mecanic pe care-l notăm cu $\bar{M}$ şi care acţionează asupra unui corp de probă dielectric, avînd momentul electric $\bar{p}$, plasat în cîmp de intensitate $\bar{E}$, are următoarea expresie:

$$\bar{M} = \bar{p} \times \bar{E} \qquad (2.17)$$

Aici, momentul electric $\bar{p}$ este o mărime de stare a unui mic corp de probă dielectric care caracterizează starea lui globală de polarizare.

Calculul cuplului care acţionează asupra unui dipol electric va conduce la un rezultat identic.

Forţa exercitată asupra sarcinii + q este (Fig. 2.24):

$$\bar{F}_{e1} = + q \bar{E}$$

iar forţa exercitată asupra sarcinii - q este:

$$\bar{F}_{e2} = - q \bar{E}'$$

Dacă $\bar{E} = \bar{E}'$ (cîmp uniform) cuplul este:

$$\bar{M} = \frac{\bar{l}}{2} \times \bar{F}_{e1} - \frac{\bar{l}}{2} \times \bar{F}_{e2} = \bar{l} \times q \bar{E} = (q \bar{l}) \times \bar{E} = \bar{p} \times \bar{E}$$

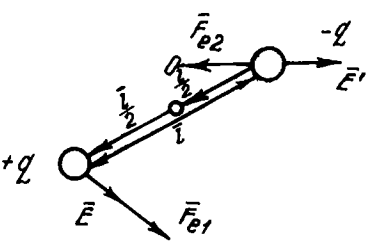


Fig. 2.24. Notaţii folosite în expresia cuplului care acţionează asupra unui dipol electric.

Rezultă deci pentru $\overline{M}$ aceeaşi expresie ca şi în cazul unui mic corp polarizat electric. In concluzie, orice corp polarizat electric este echivalent cu un dipol electric sau cu o sumă de dipoli.

Revenind la problema polarizării dielectricilor nepolari, se poate arăta, teoretic, că deplasarea nucleului respectiv deformarea orbitei electronului sînt proporţionale cu intensitatea cîmpului electric. Aceasta înseamnă că distanţa $\overline{l}$ dintre sarcinile fictive ale dipolului şi momentul $\overline{p}$ al acestuia sînt proporţionale cu $\overline{E}$.

2.5.2. Dielectricii polari conţin molecule care nu sînt neutre din punctul de vedere al cîmpului electric produs, adică ele se comportă ca dipoli electrici chiar în lipsa unui cîmp electric exterior. Efectul lor global este însă nul deoarece moleculele sînt orientate întîmplător şi astfel ele se neutralizează reciproc (Fig. 2.25 a).

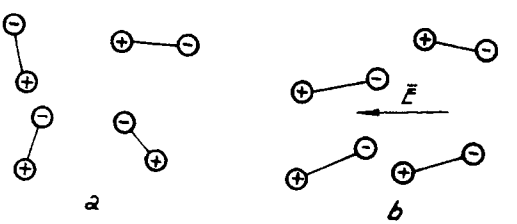


Fig. 2.25. Polarizarea dielectricilor polari:
a) dipolii în absenţa cîmpului electric;
b) dipolii după aplicarea cîmpului electric.

Dacă se aplică un cîmp electric, moleculele tind să se orienteze după direcţia cîmpului (Fig. 2.25 b) astfel încît efectul lor global este echivalent cu acela al unor dipoli paraleli cu intensitatea cîmpului electric.

Cuplul electric exercitat asupra moleculelor este echilibrat de forţele de agitaţie termică ce tind să redea moleculelor poziţiile lor haotice anterioare: cu cît este mai intens cîmpul exterior, cu atît moleculele vor avea o orientare mai apropiată de direcţia cîmpului, deci efectul lor global va fi

mai mare. Se poate arăta că polarizaţia este proporţională cu intensitatea cîmpului.

Experimental, se constată că în anumite condiţii, asupra corpurilor izolante neîncărcate cu sarcină electrică dar introduse într-un cîmp electric, se exercită forţe şi în plus apar şi momente care tind să rotească corpul.

Aceste forţe şi momente au alte proprietăţi decît cele pe care le-am stabilit în condiţiile de experimentare ale micului corp de probă şi deci nu au legătură cu sarcina electrică. Astfel, se constată că asupra dielectricilor neîncărcaţi cu sarcină electrică acţionează forţe care depind de orientarea corpului nu numai de aşezarea lui în cîmp. In consecinţă, proprietăţile electrice ale dielectricilor nu sînt caracterizate pe deplin numai de sarcina electrică; este necesar să se utilizeze şi o altă mărime pentru a descrie comportarea lor; această mărime este un vector şi se numeşte moment electric.

Intr-o altă exprimare, se spune despre dielectricii la care momentul electric este diferit de zero că sînt polarizaţi. Fenomenul în urma căruia apar forţe şi momente de altă natură decît forţa datorită sarcinii electrice se numeşte polarizarea dielectricilor.

Polarizarea dielectricilor poate fi de două feluri: polarizare permanentă şi polarizare temporară. Polarizarea permanentă este independentă de intensitatea cîmpului electric pe cînd polarizarea temporară depinde de intensitatea cîmpului electric în regiunea unde se află corpul; polarizarea temporară dispare cînd corpul este scos de sub acţiunea cîmpului electric.

Practic toţi dielectricii - solizi, lichizi sau gazoşi-prezintă o polarizare temporară mai mult sau mai puţin accentuată. In schimb, numai la puţini dielectrici apare o polarizare permanentă. Uneori, polarizarea permanentă este condiţionată de anumite acţiuni exterioare de natură neelectrică, de exemplu de deformări mecanice sau de încălzire. Polarizarea permanentă prin deformarea mecanică se numeşte polarizare piezoelectrică şi apare la unele corpuri cristaline cum sînt cristalul de cuarţ şi sarea seignette.

Polarizarea prin încălzire se numeşte polarizare piroelectrică. O polarizare permanentă puternică se realizează la corpurile numite electreţi, constituite din anumite materiale (răşini diferite, plexiglas etc.) care se supun în stare topită unui cîmp electric intens, păstrîndu-şi după solidificare starea de polarizare un timp îndelungat.

2.6. Intensitatea cîmpului electric în interiorul corpurilor polarizate. Inducţia electrică

Prin urmare,din cele prezentate, se înţelege că indiferent dacă moleculele dielectricului sînt neutre sau nu din punct de vedere electric, atunci cînd sînt introduse într-un cîmp electric, acestea capătă prin inducţie un moment electric.

Acest moment electric este proporţional cu cîmpul electric şi se situează pe direcţia liniilor de cîmp.

Să considerăm un cîmp electric omogen şi uniform de intensitate $\bar{E}_v$. Vom introduce dielectricul în acest cîmp.

Efectul va fi polarizarea dielectricului - adică separarea sarcinilor pozitive de cel al centrului sarcinilor negative în cazul dielectricilor nepolari; la dielectricii polari va apare numai un efect de orientare al dipolilor electrici existenţi în dielectric. Privit în ansamblu, dielectricul va rămîne neutru din punct de vedere electric. Totuşi ia naştere un efect interesant: o suprafaţă a dielectricului se va încărca cu sarcină de un semn (Ex:pozitivă) iar suprafaţa opusă se va încărca cu sarcină de sens contrar (negativă) (Fig. 2.26).

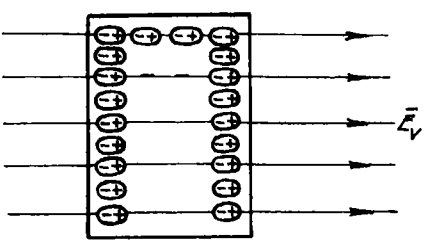


Fig. 2.26. Dielectric în cîmp electric omogen şi unifórm $\bar{E}_v$.

In interiorul dielectricului, sarcinile electrice de polarizaţie se neutralizează reciproc şi pe ansamblu, dielectricul este electric neutru (nu apar sarcini suplimentare). Deci, sarcina de suprafaţă indusă pozitivă, trebuie să fie egală în mărime absolută cu sarcina negativă indusă pe suprafaţa opusă.

Aceste sarcini superficiale vor genera un cîmp electric în interiorul dielectricului $\bar{E}'$ care se va opune cîmpului exterior $\bar{E}_v$ (Fig. 2.27).

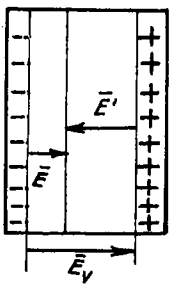


Fig. 2.27. Cîmpul electric $\bar{E}'$ în interiorul dielectricului.

Cîmpul rezultant în dielectric $\bar{E}$ este suma vectorială dintre cîmpul exterior $\bar{E}_v$ şi cîmpul electric creat de dielectric, $\bar{E}'$. Acest cîmp rezultant are aceeaşi direcţie cu $\bar{E}_v$ dar este mai puţin intens.

Dacă un dielectric este aşezat într-un cîmp electric, sarcina indusă pe suprafeţe va tinde să micşoreze intensitatea cîmpului iniţial.

Prin urmare, pentru caracterizarea cîmpului electric într-un dielectric, nu mai este suficientă o singură mărime electrică ca în cazul cîmpului electric în vid unde se folosea $\bar{E}_v$.

In acest caz se introduc noi mărimi după cum urmează:

Permitivitatea relativă a dielectricului, ca raport dintre intensitatea cîmpului electric în vid $\bar{E}_v$ şi intensitatea cîmpului rezultant în dielectric $\bar{E}$, notată cu ε_r:

$$\varepsilon_r = \frac{\bar{E}_v}{\bar{E}} \qquad (2.18)$$

Permitivitatea absolută a dielectricului ε:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \ \varepsilon_r \quad \text{în care } \varepsilon_0 = \text{permitivitatea vidului}$$

Inducţia electrică în corp $\bar{D}$:

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \bar{E} = \varepsilon \bar{E} \qquad (2.19)$$

Pentru vid, $\varepsilon_r = 1$, se obţine:

$$\bar{D}_v = \varepsilon_0 \bar{E}_v \qquad (2.19\,a)$$

2.6.1. Polarizarea electrică temporară caracterizează starea de polarizare a dielectricului. Este o mărime vectorială proporţională cu intensitatea cîmpului electric generat de sarcinile superficiale de polarizaţie (Fig. 2.28) şi are următoarea expresie vectorială:

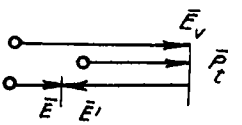


Fig. 2.28. Compunerea vectorilor: $\bar{E}_v$, $\bar{E}$, $\bar{E}'$ şi $\bar{P}_t$.

$$\bar{P}_t = -\varepsilon_0 \bar{E}'$$

Dar $$\bar{E}_v + \bar{E}' = \bar{E}$$

sau $$-\bar{E}' = \bar{E}_v - \bar{E}\,,$$

De unde:

$$\bar{P}_t = \varepsilon_0 (\bar{E}_v - \bar{E})\,.$$

Dar conform relaţiei (2.18) $\bar{E}_v = \varepsilon_r \bar{E}$

Se obţine:

$$\bar{P}_t = \varepsilon_0 \varepsilon_r \bar{E} - \varepsilon_0 \bar{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \bar{E} = \varepsilon_0 \chi_e \bar{E} \qquad (2.20)$$

în care mărimea:

$\chi_e = \varepsilon_r - 1$ se numeşte <u>susceptivitate electrică.</u>

Dacă dielectricul prezintă polarizaţie temporară $\bar{P}_t$ şi polarizaţie permanentă pe care o notăm cu $\bar{P}_p$, atunci polarizaţia dielectricului $\bar{P}$ va fi:

$$\bar{P} = \bar{P}_p + \bar{P}_t .$$

Experimental se constată că între inducţia $\bar{D}$, cîmpul electric din interiorul dielectricului $\bar{E}$ şi polarizaţia $\bar{P}$ există relaţia:

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P} \qquad (2.21)$$

Din această expresie rezultă: determinarea stării de polarizare a unui dielectric se poate face complet numai cu ajutorul a două mărimi vectoriale: intensitatea cîmpului electric $\bar{E}$ şi inducţia electrică $\bar{D}$. Inducţia electrică $\bar{D}$ se mai numeşte şi <u>deplasare electrică.</u>

Unitatea de măsură a inducţiei electrice $\bar{D}$, aceeaşi ca pentru polarizaţia $\bar{P}$, este coulomb pe metru pătrat (C/m^2).

2.7. Fluxul electric

Fluxul electric printr-o suprafaţă plană situată într-un cîmp electric omogen (Fig. 2.29) este o mărime scalară, egală cu produsul dintre inducţia electrică D şi aria suprafeţei A (liniile de cîmp se consideră perpendiculare pe suprafaţă):

$$\Psi = DA \qquad (2.22)$$

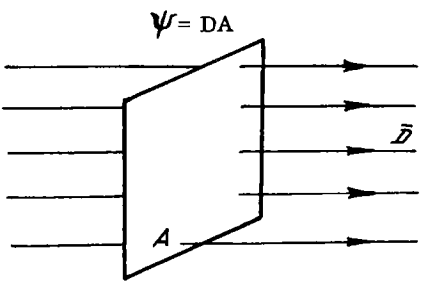


Fig. 2.29. Fluxul electric prin o suprafaţă plană.

Dacă suprafaţa este o sferă de rază R, iar în centrul sferei este plasată o sarcină punctuală q (Fig. 2.30), se observă că în fiecare punct al suprafeţei intensitatea cîmpului electric este

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

iar inducţia electrică $D = \varepsilon_0 E = \frac{q}{4\pi R^2}$.

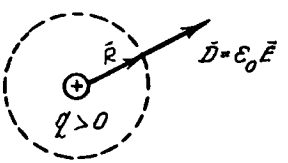
Se obţine fluxul electric

$$\Psi = D\, A_{Sferă} = \frac{q}{4\pi R^2}\, 4\pi R^2 = q$$

sau $$\Psi = q \ . \qquad (2.23)$$

Se poate demonstra că această egalitate este valabilă în cazul oricărei suprafeţe închise.

Relaţia (2.23) reprezintă legea fluxului electric şi are următorul enunţ: fluxul electric prin orice suprafaţă închisă este egal cu sarcina electrică din interiorul suprafeţei, indiferent de forma suprafeţei sau de repartizarea sarcinii în interiorul suprafeţei.



2.30. Fluxul unei sarcini electrice punctuale.

2.8. Condensatoare electrice

Considerăm două conductoare 1 şi 2 încărcate cu sarcinile electrice q_1 şi q_2 care îndeplinesc următoarele condiţii (Fig. 2.31): sînt izolate printr-un dielectric fără polarizaţie permanentă;

- sînt foarte depărtate de alte conductoare astfel încît toate liniile de cîmp care pleacă de pe unul din conductoare sosesc pe celălalt.

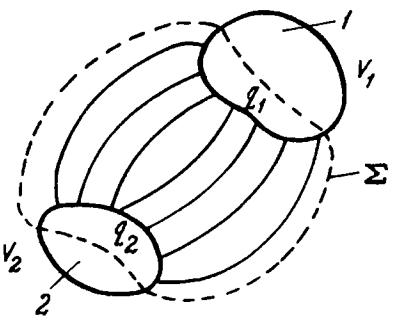


Fig. 2.31. Conductoarele 1 şi 2 sînt încărcate cu q_1 şi q_2

Considerăm o suprafaţă închisă Σ de o astfel de formă, încît în exteriorul conductoarelor să fie paralelă cu liniile de cîmp, să cuprindă pe toate şi să treacă prin cele două conductoare.

Fluxul electric ψ_Σ prin suprafaţa închisă Σ este nul deoarece în interiorul conductoarelor nu avem cîmp electric, iar în exteriorul lor, liniile de cîmp sînt paralele cu suprafaţa.

Din legea fluxului electric se obţine:

$$0 = q_\Sigma$$

sau: $0 = q_1 + q_2$, deoarece în interiorul suprafeţei închise există sarcinile electrice q_1 şi q_2.

Rezultă : $$+ q_1 = - q_2.$$

Sarcinile electrice de pe cele două armături ale unui condensator electric sînt egale şi de semn contrar.

Se notează $$|q_1| = |q_2| = q \quad .$$

2.8.1. Teorema capacităţii electrice.

Raportul pozitiv dintre sarcina electrică pozitivă şi tensiunea dintre armături:

$$C = \frac{q}{U} \tag{2.24}$$

se numeşte capacitatea condensatorului. Este independentă de sarcină, de tensiune (pentru dielectric liniar) şi depinde numai de geometria armăturilor şi de permitivitatea dielectricului.

Unitatea de măsură pentru capacitatea electrică în SI este faradul (F):

$$1 \text{ farad} = \frac{1 \text{ coulomb}}{1 \text{ volt}} \quad \text{sau} \quad 1\,F = \frac{1C}{1V}$$

2.8.2. Capacitatea condensatorului plan.

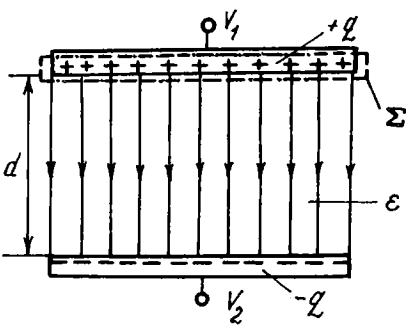


Fig. 2.32. Condensatorul plan.

Condensatorul plan este format din două plăci conductoare, paralele, avînd un dielectric de permitivitate ε între plăci (Fig. 2.32).

Plăcile se află la distanţa d.

Pentru calculul capacităţii se foloseşte formula (2.24.).

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{q}{U_{12}}$$

în care q reprezintă sarcina electrică din interiorul suprafeţei închise Σ. Din legea fluxului electric se obţine:

$$DA = \varepsilon EA = q$$

Tensiunea electrică între cele două plăci, pentru cîmp uniform şi omogen, este: $U_{12} = E\ d$.

Se obţine: $C = \frac{\varepsilon EA}{Ed}$ respectiv $C = \frac{\varepsilon A}{d}$. (2.25)

La calculul capacităţii condensatorului plan s-a presupus că între armături, cîmpul este uniform şi omogen adică în oricare punct intensitatea cîmpului electric este constantă şi orientată în lungul liniilor de cîmp.

Din expresia capacităţii condensatorului plan se determină unitatea de măsură pentru permitivitatea ε : farad pe metru (F/m).

In practică, dielectricul dintre cele două plăci este constituit din mai multe straturi diferite de permitivităţi; ε_1, ε_2, $\varepsilon_3 \ldots \varepsilon_n$ (Fig. 2.33).

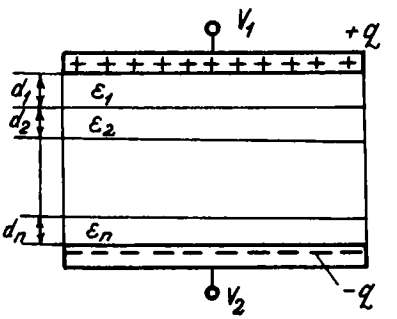


Fig. 2.33. Condensator plan cu n straturi.

Calculul capacităţii condensatorului cu mai multe straturi de dielectric se realizează tot cu ajutorul relaţiei:

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{q}{U_{12}} .$$

Se obţine:

$$C = \frac{A}{\sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{\varepsilon_k}} \qquad (2.26)$$

2.8.3. Capacităţi echivalente Condensatoare legate în serie şi condensatoare legate în paralel

Se consideră condensatoare legate între ele în cele mai diferite moduri avînd două borne de acces: A şi B (Fig. 2.34).

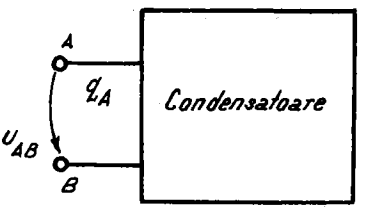


Fig. 2.34. Condensatoare cu două borne de acces.

Dacă între A şi B se aplică tensiunea U_{AB}, atunci pe armăturile condensatoarelor legate la capătul A, se va afla sarcina electrică q_A.

Se defineşte capacitatea echivalentă între A şi B, raportul:

$$C_{eAB} = \frac{q_A}{U_{AB}} \tag{2.27}$$

Se va folosi această definiţie la determinarea capacităţii echivalente a unui grup de condensatoare legate în serie şi apoi în paralel.

Legarea în serie a condensatoarelor. Se consideră n condensatoare legate în serie fără sarcină electrică iniţială şi avînd aplicată tensiunea U_{AB} la bornele A şi B (Fig. 2.35).

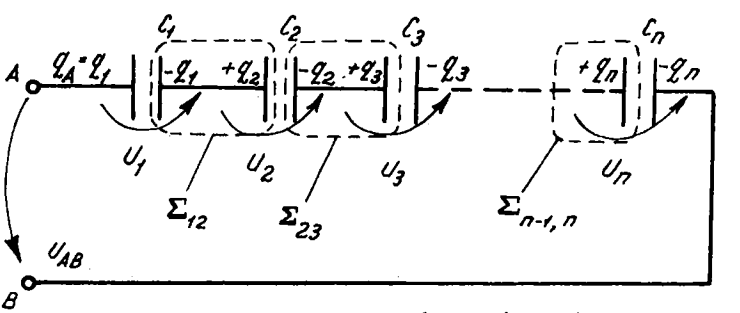


Fig. 2.35. Condensatoare legate în serie.

In raport cu bornele A şi B, interesează capacitatea echivalentă C_{eAB}.

Pentru că sarcina electrică iniţială s-a considerat nulă, rezultă că în interiorul suprafeţei Σ_{12}, se poate scrie:

$$- q_1 + q_2 = 0$$

La fel se scrie şi pentru suprafaţa închisă Σ_{23}:

$$- q_2 + q_3 = 0 \ .$$

Pentru $\Sigma_{n-1,n}$:

$$- q_{n-1} + q_n = 0 \ .$$

Rezultă:

$$q_1 = q_2 = q_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = q_n = q_A = q$$

La legarea în serie, sarcinile de pe armăturile condensatoarelor sînt **egale.**

Aplicînd teorema potenţialului electrostatic (2.6 bis) se scrie:

$$U = U_{AB} = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots\ldots\ldots + U_n$$

La legarea în serie, tensiunea aplicată este egală cu suma tensiunilor de la bornele condensatoarelor.

Capacitatea echivalentă va fi:

$$C_{eAB} = \frac{q_A}{U_{AB}} = \frac{q}{U_1 + U_2 + U_3 + \ldots\ldots\ldots + U_n}$$

sau:

$$C_{eAB} = \frac{q}{\frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3} + \ldots + \frac{q}{C_n}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \ldots + \frac{1}{C_n}}$$

Rezultă:

$$\frac{1}{C_{eAB}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{C_n} \quad (2.28)$$

Valoarea inversă a capacităţii echivalente este egală cu suma valorilor inverse ale capacităţilor condensatoarelor legate în serie.

Legarea în paralel a condensatoarelor. Considerăm condensatoarele C_1, C_2.....C_n legate în paralel fără sarcină electrică iniţială (Fig. 2.36). La bornele AB este aplicată tensiunea $U_{AB} = U$.

Care va fi capacitatea echivalentă C_{eAB}?

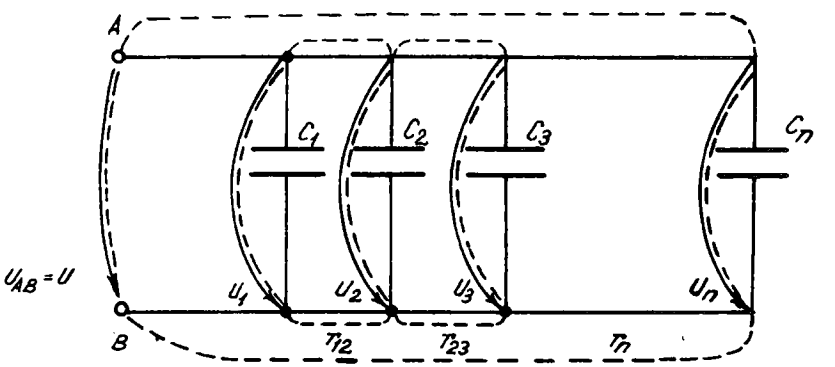


Fig. 2.36. Condensatoare legate în paralel.

Aplicînd teorema potenţialului electrostatic pe conturul Γ_{12}, se obţine:

$$U_1 - U_2 = 0$$

idem pentru conturul Γ_{23} :

$$U_2 - U_3 = 0$$

iar pentru conturul Γ_n:

$$U_n - U_{AB} = 0$$

Rezultă: $U_1 = U_2 = U_3 = \ldots\ldots\ldots = U_n = U_{AB} = U.$

Sarcina electrică q_A se regăseşte pe armăturile condensatoarelor:

$$C_1,\ C_2,\ C_3 \ldots\ldots\ldots C_n.$$

Se obţine:

$$q_1 + q_2 + q_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + q_n = q_A = q$$

Capacitatea echivalentă între bornele A şi B va fi:

$$C_{eAB} = \frac{q_A}{U_{AB}} = \frac{q_1 + q_2 + \ldots\ldots + q_n}{U} = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2 \quad C_n U_n}{U}$$

Se obţine în final simplificînd cu U;

$$C_{eAB} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots\ldots\ldots + C_n \qquad (2.29)$$

CAPITOLUL 3

ELECTROCINETICA

3.1. Starea electrocinetică. Intensitatea curentului de conducţie.

Mişcarea sarcinilor electrice (purtătorilor de sarcină) generează fenomene care pot avea aplicaţii practice utile.

Electrocinetica - după cum arată denumirea - reprezintă partea din Electrotehnică ce se ocupă cu studiul mişcării acestor purtători de sarcină, cauza care pune în mişcare aceşti purtători şi efectele mişcării lor.

In electrostatică, sarcinile electrice nu se deplasau, nu s-a constatat schimb de energie cu exteriorul; singurul efect stabilit a fost apariţia unui cîmp electric.

Starea electrocinetică se poate pune în evidenţă pe baza unei experienţe. In acest sens, două corpuri conductoare A şi B încărcate cu sarcini electrice şi aflate la potenţiale V_A respectiv V_B sînt legate printr-un fir conductor, legătură denumită galvanică (Fig. 3.1).

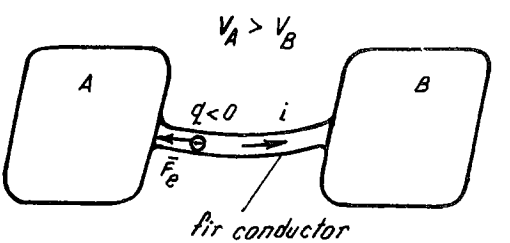


Fig. 3.1. Legarea a două conductoare A şi B printr-un fir conductor.

Se constată că firul de legătură se încălzeşte, fenomen ce apare ca urmare a deplasării purtătorilor de sarcină electrică. Starea în care se află firul conductor se numeşte stare electrocinetică.

Deplasarea purtătorilor de sarcină electrică încetează atunci cînd cele două potenţiale au devenit egale $V_A = V_B$, conductoarele A şi B ajungînd într-o stare electrostatică diferită de starea electrostatică iniţială.

Sarcinile electrice care se deplasează în unitatea de timp prin firul conductor reprezintă intensitatea curentului electric sau prescurtat curent electric (mărime electrică fundamentală). Se notează cu i, I, $\underline{I}$. Curentul electric există atît timp cît $V_A \neq V_B$. Cînd potenţialele celor două corpuri s-au egalizat, curentul electric devine zero. Microscopic , curentul electric se explică prin trecerea electronilor de la corpul cu potenţial mai scăzut V_B la corpul cu potenţial mai ridicat V_A sub acţiunea forţelor de natură electrică $\bar{F}e$ determinate de existenţa cîmpului electric. Odată cu egalizarea potenţialelor, cîmpul electric în conductoare devine nul, situaţie în care nu mai există curent electric.

Sensul curentului electric în metale-corpurile A şi B sînt considerate metalice - se adoptă în sens invers mişcării electronilor.

Adoptarea acestui sens în cazul metalelor considerate conductoare de specia întîi s-a făcut pentru a exista o concordanţă cu sensul curentului în electroliţi - consideraţi conductoare de specia a doua. In cazul electroliţilor (aflîndu-se în mişcare purtători de sarcină pozitivă - ioni pozitivi - şi purtători de sarcină negativă - ioni negativi -) s-a adoptat sensul curentului de la potenţialul mai ridicat la potenţialul mai scăzut adică sensul ionilor pozitivi ; deci sens contrar purtătorilor de sarcină negativi.

In continuare, se va defini unitatea de măsură pentru această mărime electrică - intensitatea curentului electric. In Sistemul Internaţional SI s-a adoptat ca unitate de măsură amperul care este dată de raportul:

$$1 \text{ amper} = \frac{1 \text{ Coulomb}}{1 \text{ secundă}} \; ; \quad 1 \text{ A} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ s}} \; ;$$

şi reprezintă sarcina electrică de un coulomb care traversează într-o secundă secţiunea din conductor considerată.

Se mai folosesc multiplii şi submultiplii: kiloamperul (kA) miliamperul (mA) microamperul (μA).

Dacă intensitatea curentului electric nu variază în timp, se consideră că mărimea este staţionară şi se numeşte curent continuu. Cînd mărimea variază în timp se spune că este nestaţionară şi curentul este variabil.

In aplicaţiile practice curentul variabil des întîlnit este curentul alternativ sinusoidal. Studiul acestor curenţi se va prezenta ulterior.

Curentul electric nu are ca efect numai încălzirea conductoarelor parcurse. Experimental s-au constatat şi alte efecte: efectul chimic determinat cu ajutorul unui aparat denumit Voltametru, efectul luminos observat în becurile cu incandescenţă sau efectul mecanic din motoarele electrice. Toate aceste efecte au astăzi largi aplicaţii în practică.

3.2. Densitatea curentului electric de conducţie

Curentul electric definit anterior nu caracterizează suficient starea electrocinetică a corpurilor. Pentru aplicaţiile practice şi determinarea unor relaţii matematice între mărimile electrice se introduce o mărime derivată, densitatea curentului electric de conducţie. Se defineşte ca reprezentînd curentul care se distribuie pe unitatea de suprafaţă a secţiunii conductorului.

In cazul unui conductor filiform parcurs de curent electric de conducţie i repartizat uniform pe secţiunea A, densitatea de curent de conducţie notată cu J se reprezintă ca o mărime vectorială $\bar{J}$ conform cu Fig. 3.2.

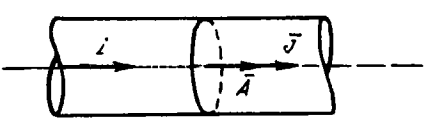


Fig. 3.2. Densitatea de curent de conducţie $\bar{J}$.

Se poate scrie relaţia:

$$i = \bar{J} \cdot \bar{A} \qquad (3.1)$$

In care $\bar{A}$ reprezintă vectorul de mărime egal cu suprafaţa A şi orientare conform figurii. $\bar{J}$ este vectorul densitate de curent de conducţie.

Produsul scalar al acestor vectori omoparaleli se scrie:

$$i = J\ A \cos 0^{o} = J\ A \qquad (3.1a)$$

Rezultă că densitatea de curent de conducţie $J = \frac{i}{A}$ (3.1b) este raportul dintre curentul care străbate o secţiune dată şi suprafaţa acestei secţiuni.

In Sistemul Internaţional SI unitatea de măsură pentru densitatea de curent este A/m^2. Din motive practice se foloseşte o altă unitate de măsură, A/mm^2.

Avem: $\frac{1\ A}{mm^2} = 1\ \frac{A}{10^{-6}\ m^2} = 10^6\ \frac{A}{m^2}$

In conductoarele de cupru utilizate în construcţia de maşini şi aparate electrice, densitatea de curent permisă, pentru a avea o încălzire admisibilă a conductoarelor şi izolaţiei, este de 3 - 4 A/mm^2 dar pentru secţiuni mici sau conductoare neizolate, densitatea de curent capătă valori mai ridicate.

In tabelul 3.1. sînt redate valorile densităţii admisibile de curent pentru diferite conductoare standardizate, izolate sau neizolate, ale cuprului.

Tabelul 3.1

S (mm^2)	Conductor cupru izolat J (A/mm^2)	Conductor cupru neizolat	
		Incăperi închise J (A/mm^2)	In aer J (A/mm^2)
4	9	14,2	14,5
6	7,7	12,2	12,6
10	6,8	10,3	10,8
16	5,7	8,1	9,4
25	4,9	6,6	8,2
35	4,3	6,0	7,7
50	3,8	5,3	6,7
70	3,5	4,8	6,1
95	3,1	4,3	5,4

3.3. Natura fizică a curentului electric de conducţie

Curentul electric de conducţie reprezintă deplasarea ordonată a microparticulelor libere încărcate cu sarcină electrică - purtătorii de sarcină electrică.

In cazul metalelor, aceste microparticule sînt electronii de conducţie, în cazul electroliţilor sînt ionii încărcaţi cu sarcină pozitivă sau negativă. In lipsa mişcării ordonate, microparticulele sînt în stare permanentă de agitaţie termică. Viteza medie în mişcarea de agitaţie termică este ridicată şi depinde de temperatură. Astfel, cînd temperatura este de $20^{o}C$, viteza medie a microparticulelor este de 10^{5} m/s. Viteza în mişcarea ordonată, care este provocată de forţele de natură electrică, este mult mai mică şi egală cu 10^{-4} m/s.

In deplasarea microparticulelor şi apariţia curentului de conducţie, esenţială este mişcarea ordonată, efectul mişcării de agitaţie termică este nul ca urmare a caracterului dezordonat al acestei mişcări.

Sensul vitezei microparticulei coincide cu sensul cîmpului electric cînd sarcina acesteia este pozitivă. Cînd sarcina este negativă, deplasarea se face în sens contrar cîmpului electric. Dacă viteza medie de deplasare a microparticulelor nu depinde de timp, conductorul se află în stare electrocinetică staţionară şi curentul de conducţie se numeşte curent continuu (c.c.). Dacă viteza medie de deplasare este o funcţie de timp, starea electricinetică a conductorului este nestaţionară, şi curentul de conducţie este curent variabil.

Degajarea de căldură în conductoarele parcurse de curent de conducţie se explică la scară microscopică prin ciocnirile care se produc la deplasarea particulelor încărcate cu sarcină în interiorul corpurilor. La fiecare ciocnire, microparticula pierde din energia sa de mişcare - energie cinetică - care se transformă în energie calorică. Pentru reaccelerare, microparticula trebuie să primească energie din exterior prin intermediul cîmpului electric aplicat conductorului.

3.4. Curentul electric în semiconductoare

Pentru a explica procesul de conducţie a curentului în semiconductoare este necesară prezentarea pe scurt a teoriei cu privire la structura materiei. Atomul se compune dintr-un nucleu şi electroni care în stare de echilibru se găsesc pe anumite nivele energetice "permise".

Pe acelaşi nivel energetic există un singur electron iar electronul mai îndepărtat de nucleu are o energie mai mare. In Fig. 3.3 sînt reprezentate nivelurile energetice pentru metale, semiconductoare şi izolatoare. Electronii trec de pe un nivel energetic pe un alt nivel energetic, caz în care emit sau primesc energie.

Nivelele energetice se pot grupa formînd zona de valenţă şi zona de conducţie. In cazul metalelor aceste două zone se întrepătrund dar în cazul semiconductoarelor şi izolatoarelor, între aceste zone, există o zonă interzisă care în cazul semiconductoarelor este mai îngustă ca în cazul izolatoarelor. Pentru ca electronii să depăşească această zonă interzisă trebuie să primească energii foarte mari din exterior.

Electronii din zona de conducţie formează gazul electronic. Aceştia se mai numesc electroni liberi sau electroni de conducţie.

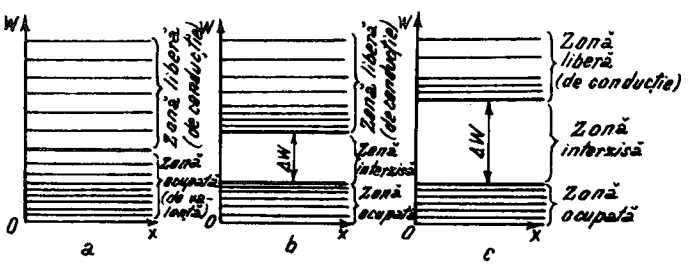


Fig. 3.3. Nivele energetice

a - metal b - semiconductor c - izolator

In semiconductoare şi izolanţi, la temperaturi joase, toţi electronii aparţin nucleului fiind plasaţi în zona de valenţă. Neexistînd electroni în zona de conducţie, nu vom avea electroni de conducţie, deci nu va exista curent de conducţie. Dacă se ridică temperatura, atunci electronii vor căpăta energie suficient de mare pentru a trece din zona de valenţă în zona de conducţie. In urma trecerii electronului pe alt nivel de energie, în locul acestuia va rămîne un gol echivalent cu sarcina electrică pozitivă. Golul respectiv poate fi

ocupat de un alt electron din reţeaua cristalină ceea ce reprezintă apariţia unui alt gol. Se ajunge în final, dacă se aplică o diferenţă de potenţial respectiv un cîmp electric, la o mişcare ordonată a electronilcr din semiconductor, respectiv a golurilor în sens contrar. Deci, în cazul semiconductoarelor, spre deosebire de metale, curentul electric este reprezentat de mişcarea electronilor din zona liberă şi de mişcarea golurilor din zona de valenţă. Deci, în cazul semiconductoarelor, conductivitatea este mixtă: prin electroni respectiv prin goluri.

Cînd semiconductorul este chimic pur cum este de exemplu carbonul, siliciul, staniul, plumbul şi compuşii lor, numărul electronilor liberi este egal cu numărul golurilor din zona de valenţă. Aceste elemente sînt tetravalente, adică posedă patru electroni de valenţă. Conductivitatea este intrinsecă.

In urma unor experienţe s-a constatat că se poate schimba foarte mult conductivitatea electrică a semiconductorului dacă i se adaugă impurităţi dintr-un element pentavalent sau trivalent. Consecinţa este că în zona interzisă apar nivele energetice pe care se plasează electronii de valenţă ai atomului de impuritate. In acest fel, zona interzisă se îngustează şi mai mult ceeace determină ca trecerea electronilor în zona de conducţie să se realizeze cu o cantitate mică de energie primită din exterior. Cînd semiconductorul - de exemplu germaniu, element tetravalent - primeşte ca impuritate un element pentavalent ca arseniu, stibiu, bismut etc., rezultă un electron în exces.

Ca exemplu, vom considera că semiconductorul pur este germaniu iar ca impuritate se foloseşte elementul pentavalent-arseniu (Sb). Patru electroni de valenţă ai atomilor pentavalenţi vor fi atraşi de atomii de germaniu (Fig. 3.4 a).

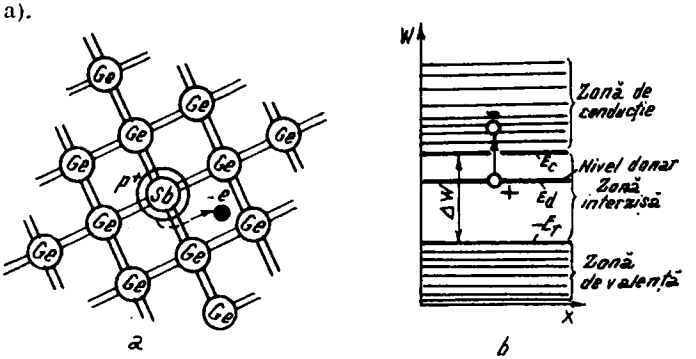


Fig. 3.4 Conductivitatea electrică a semiconductoarelor dotate cu impurităţi donoare. a) reprezentarea schematică a legăturii b) diagrama nivelelor energetice.

Cel de al cincilea electron va fi atras numai de un nucleu, deci va avea o legătură mai slabă, motiv pentru care chiar la temperatura mediului ambiant acest electron poate deveni un electron de conducţie.

Fiindcă aceste impurităţi sînt din punct de vedere chimic pentavalente, vor oferi în reţeaua semiconductorului electroni de conducţie. Acestea se numesc impurităţi donoare iar semiconductorul este un semiconductor de tip n. Conducţia la semiconductorul de tip n se realizează de electronii de conducţie.

Se constată existenţa unei conductivităţi electrice şi în cazul în care impuritatea adăugată semiconductorului germaniu este un element trivalent din punct de vedere chimic (iridiu, bor, aluminiu). Considerăm că elementul de impurificare este de exemplu iridiu. Atomii de iridiu vor avea numai trei legături realizate cu atomii vecini ai semconductorului germaniu, o legătură a semiconductorului va rămîne nesatisfăcută. Chiar la temperatura ambiantă, un electron dintr-o altă legătură poate completa legătura nesatisfăcută. In locul electronului va rămîne un gol. iar atomul de impuritate care a primit electronul va deveni negativ din punct de vedere electric, adică va fi ion negativ.

Impurităţile se numesc acceptoare iar semiconductorul cu astfel de impurităţi se numeşte semiconductor de tip p. Conducţia electrică se realizează în cazul acesta prin goluri. Si la semiconductoarele impurificate cu elemente trivalente apar nivele energetice în zona interzisă a atomilor de impurităţi, aceste nivele sînt însă mai apropiate de zona de valenţă. In acest caz, energia necesară ca un electron să treacă din zona de valenţă pe nivelul energetic din zona interzisă, denumit şi nivel acceptor, este mică.

Electronii care trec pe nivelele acceptoare lasă în urma lor goluri care participă la conducţia electrică. Electronii de pe nivelele acceptoare nu pot participa la conducţia curentului electric deoarece sînt legaţi de atomii acceptori.

Aplicînd în mod corespunzător o diferenţă de potenţial în interiorul semiconductorului de tip n sau de tip p, apare un cîmp electric şi semiconductorul este străbătut de curent datorită mişcării ordonate a purtătorilor mobili de sarcini electrice reprezentaţi de electroni sau goluri.

Asamblarea unui semiconductor compus din două regiuni, o regiune de tip p, alta de tip n, dă naştere unei joncţiuni de tip pn sau unei diode semiconductoare. Dacă avem două joncţiuni p n p sau n p n, se obţine dispozitivul electronic - tranzistor iar dacă joncţiunile sînt p n p n, dispozitivul semiconductor se numeşte tiristor. Funcţionarea acestor dispozitive semiconductoare este prezentată pe larg în lucrări de specialitate corespunzătoare.

3.5. Curentul electric în vid

Dacă într-un tub de sticlă se realizează o presiune foarte scăzută, se constată că între două piese metalice (electrozi), denumite catod respectiv anod, supuse la o diferenţă de potenţial $U_A = V_A - V_K$, apare o deplasare de purtători de sarcină electrică (electroni) de la catod la anod adică un curent electric (Fig. 3.5). Potenţialul anodului V_A trebuie să fie mai ridicat faţă de potenţialul catodului pe care-l notăm cu V_K, adică: $V_A > V_K$.

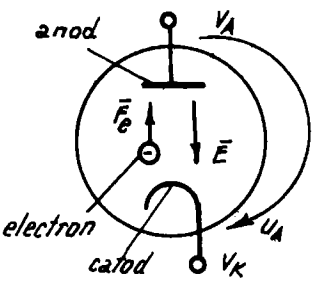


Fig. 3.5. Deplasarea purtătorilor de sarcină - electroni - în vid.

Eliberarea electronilor de către catod constituie emisiunea electronică şi se explică în modul următor: electronii din metal datorită agitaţiei termice se îndepărtează de nucleele pozitive care aparţin reţelei cristaline a metalului. Electronii nu se îndepărtează aşa de mult din cauza cîmpului electric care se naşte şi este orientat spre exteriorul metalului de la microparticulele pozitive, legate în reţeaua cristalină, spre microparticulele negative-electronii - care s-au deplasat în exteriorul metalului.

Electronii din exteriorul metalului formează gazul electronic şi în regiunea metal - gaz electronic potenţialul variază brusc. Dacă se notează cu V_i - potenţialul cel mai ridicat, caracteristic reţelei cristaline şi V_e - potenţialul cel mai scăzut de la limita exterioară a gazului electronic ($V_i > V_e$), atunci se poate defini lucrul mecanic necesar extragerii electronului din metal:

$$L_e = q\,(V_i - V_e) = q\,U_e \quad \text{în}$$

care q – sarcina electrică a electronului; $V_i - V_e = U_e$ – diferenţa de potenţial sau bariera de potenţial.

Lucrul mecanic pe care electronul trebuie să-l primească din exterior pentru a părăsi catodul este necesar mai mic decît L_e pentru faptul că electronul are o energie proprie de mişcare din cauza agitaţiei termice.

Acest lucru mecanic primit din exterior poartă denumirea de lucru mecanic de ieşire. Depinde de natura elementului din care este confecţionat catodul şi se măsoară în electron - volt. " (eV) ".
(Ex. 4.54 eV la Wolfram; 2.51 eV la bariu; 1,43 eV la cesiu).

După felul cum se obţine lucrul mecanic de ieşire, emisiunea electronică se grupează astfel:

- emisiune termoelectronică, cînd catodul este încălzit.
- emisiune fotoelectronică, cînd suprafaţa catodului este luminată;
- emisiune electronică secundară, cînd suprafaţa catodului este "bombardată" din exterior cu electroni sau ioni;
- emisiune autoelectronică, cînd suprafaţa catodului este supusă unui cîmp electric exterior de intensitate ridicată.

In cazul curentului electric din vid nu mai este valabilă legea pe care o vom prezenta ulterior - legea lui Ohm - fiindcă această lege conţine în expresia ei o constantă de material care în cazul vidului nu are sens. Din acest motiv, curentul electric din vidul creat în interiorul tubului de sticlă i_A se exprimă în funcţie de diferenţa potenţialelor $V_A - V_K = U_A$ - care se numeşte tensiune anodică:

$$i_A = G\,U_A^{3/2} \qquad (3.2)$$

în care G este o constantă caracteristică tubului electronic. Această expresie se mai numeşte „teorema exponentului 3/2".

3.6. Curentul electric în gaze

Aplicaţiile practice ale curentului electric în gaze, ca: tuburi termoionice (gazotroane, tiratroane), tuburi luminoase (lămpi cu vapori de mercur, aparate cu arc electric) au determinat cunoaşterea mai profundă a conductivităţii electrice a gazelor.

In cazul unui tub umplut cu gaz sau vapori metalici la o presiune scăzută, atomii de gaz sînt neutri din punct de vedere electric. Sub influenţa razelor cosmice, a radiaţiilor radioactive emanate de pămînt, apar purtători de sarcină electrică: ioni pozitivi sau negativi, electroni. Microparticulele vor avea o mişcare ordonată cînd între cei doi electrozi plasaţi în tub se aplică o diferenţă de potenţial. In timpul deplasării, au loc ciocniri între microparticule, în urma lor, producîndu-se excitarea atomilor de gaz sau ionizarea lor. Numai în urma ionizării atomilor se nasc purtători de sarcină electrică iar la aplicarea unui cîmp electric în gaz, purtătorii să formeze curentul electric. Pentru a studia variaţia curentului electric în gaze, în dependenţă de tensiunea aplicată celor doi electrozi, se prezintă în Fig. 3.6..... caracteristica tensiune - curent.

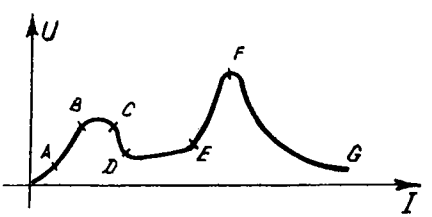


Fig. 3.6. Caracteristica tensiune - curent a tubului cu gaz.

Porţiunea OA. Pentru această porţiune, curentul electric depinde de tensiunea electrică conform legii conducţiei electrice (legea lui Ohm).

Curentul electric are valori foarte mici (10^{-18}A) şi este compus numai din electronii şi ionii pozitivi rezultaţi în urma ionizării naturale.

Porţiunea A B. Este porţiunea în care se manifestă o saturaţie de curent. In tub apare o sarcină spaţială sau de volum care împiedică creşterea intensităţii curentului. Apare şi emisiunea secundară.

Porţiunea BC. Electronii din tub rezultaţi în urma ionizării, împreună cu electronii rezultaţi în urma emisiunii secundare, primesc din partea cîmpului electric, majorat ca urmare a creşterii tensiunii aplicate electrozilor, o energie cinetică suficientă pentru a provoca, în urma ciocnirilor, ionizarea atomilor de gaz. Apare aşa numita avalanşă electronică care face să crească şi mai mult curentul. In punctul C, tensiunea se numeşte tensiune de aprindere; apare în tub descărcarea luminiscentă.

Porţiunea CD. Descărcarea luminiscentă se păstrează chiar şi pentru tensiuni inferioare punctului C aplicată între electrozi.

Porţiunea DE. Descărcarea luminiscentă se păstrează iar tensiunea se menţine constantă. In aceasta porţiune se află punctul de funcţionare al tuburilor luminiscente cu catod rece.

Porţiunea EF. Apare o emisiune termoelectronică puternică, consecinţă a bombardării catodului de către ionii pozitivi accelerati şi mai mult de cîmpul electric determinat de tensiunea crescută.

Porţiunea FG. Corespunde descărcării în arc electric; apare o emisiune foarte mare de electroni primari, pe catod îşi face apariţia pata catodică iar coloana de gaz se ionizează termic şi mai puternic.

Starea aceasta de ionizare intensă a gazului a căpătat denumirea de plasmă care, după părerea oamenilor de ştiinţă, reprezintă a patra stare de agregare a materiei. Conductivitatea electrică a plasmei se aseamănă cu cea a metalelor care, din cauza vitezei mari căpătate de electroni, ionii apar ca o reţea oarecum fixă faţă de electroni din cauza mobilităţii reduse a ionilor. Se aseamănă şi cu un electrolit (după cum vom vedea în continuare) deoarece, la formarea curentului electric, participă şi ionii rezultaţi în urma ionizării gazului.

3.7. Curentul electric în electroliţi

In cazul metalelor - considerate conductoare de specia întîi - curentul electric este format din electroni liberi care se deplasează „ordonat "sub influenţa cîmpului electric. Există o altă categorie de conductoare, conductoare de specia a doua, denumite electroliţi, la care curentul electric se compune din

ioni pozitivi sau negativi care se mişcă ordonat sub influenţa unui cîmp electric. Electrolitul este o soluţie formată dintr-un acid, sare sau bază în apă.

Curentul nu apare în componentele soluţiei luate separat cum ar fi de exemplu în acid clorhidric pur sau în apă pură. Dacă se amestecă însă aceşti doi constituienţi, atunci are loc un fenomen denumit disociaţie electrolitică, adică moleculele substanţei dizolvate în apă se descompun în ioni pozitivi şi ioni negativi.

Un exemplu poate fi soluţia de sare de bucătărie în apă. In urma disocierii electrolitice, majoritatea moleculelor de sare de bucătărie NaCl se disociază în ioni de sodiu şi clor:

$$Na\ Cl \longrightarrow Na^{+} + Cl^{-} \qquad (3.3)$$

Dacă se introduc în vasul cu soluţie de sare de bucătărie doi electrozi cărora li se aplică o diferenţă de potenţial, atunci sub influenţa forţelor de natură electrică, ionii rezultaţi în urma disocierii se pun în mişcare formînd curentul electric (Fig. 3.7). Curentul electric în electroliţi este un curent ionic spre deosebire de curentul electric din metale care este un curent

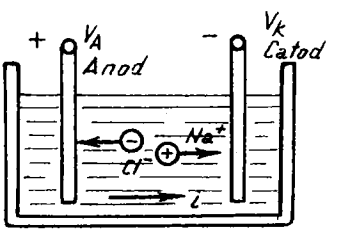


Fig. 3.7. Deplasarea ionilor şi sensul curentului în electrolit.

electronic. Microparticulele din electroliţi fiind cu sarcină electrică pozitivă respectiv negativă se vor deplasa în ambele sensuri. Electrodul pozitiv la care sosesc ionii negativi se numeşte anod iar electrodul negativ la care vin

ionii pozitivi se numeşte catod. Ionii pozitivi circulă în sensul curentului iar ionii negativi în sens contrar.

Conductivitatea electrică a electrolitului depinde de concentraţia soluţiei. De asemenea, conductivitatea este influenţată de temperatură. La creşterea temperaturii, crescînd disocierea electrolitică, conductivitatea electrică a electrolitului creşte.

Fiindcă în electroliţi curentul este realizat din ioni, va avea loc un transport de substanţă. Din această cauză, pe suprafaţa electrozilor va fi depunere de substanţă. De exemplu, în cazul unei soluţii de azotat de argint, pe catod, se depune argint.

Electroliza are aplicaţii industriale importante ca exemplu: rafinarea metalelor, prepararea metalelor din săruri, metalizarea.

Rafinarea metalelor constă în purificarea lor prin electroliză. Dacă într-o instalaţie de electroliză se foloseşte ca electrolit o soluţie de sulfat de cupru amestecat cu acid sulfuric, atunci la catod se depune cuprul pur care se mai numeşte şi cupru electrolitic.

Prepararea metalelor din sărurile lor. Un exemplu tipic este electroliza aluminiului. Electrolitul în acest caz este constituit din fluorură dublă de aluminiu şi sodiu topită, electrozii fiind formaţi din plăci de cărbune. Sarea se menţine în stare topită ca urmare a efectului termic al curentului care se deplasează în interiorul electrolitului. Această tehnologie de preparare a aluminiului prin fenomenul de electroliză se foloseşte în ţara noastră la Combinatul de Aluminiu Chimic Slatina.

Metalizarea anticorozivă a suprafeţelor metalice care nu rezistă la coroziune se realizează tot printr-un procedeu de electroliză, cunoscut şi sub numele de galvanizare (Ca exemplu: cadmierea, nichelarea, cromarea etc.).

3.8. Cîmpuri electrice imprimate

Considerăm un conductor în formă de disc (Fig. 3.8). Electronii liberi ai metalului care compun gazul electronic sînt într-o continuă agitaţie termică dezordonată a căror rezultantă este zero. Din punct de vedere electric, cu toate că aceste microparticule sînt purtătoare de sarcină electrică, cîmpul electric rezultant este zero (Fig. 3.8. a):

$$\bar{E} = 0 \qquad (3.4)$$

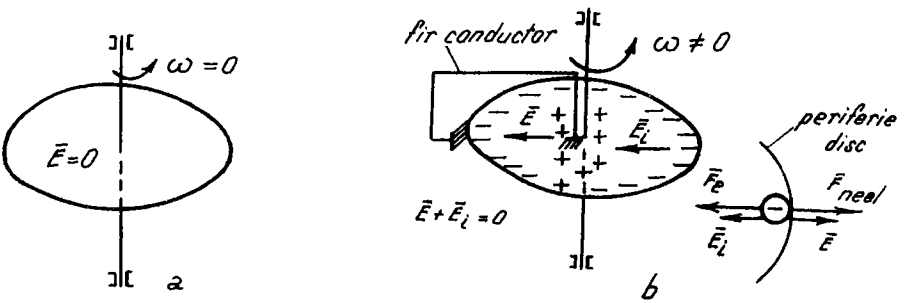


Fig. 3.8. Disc conductor. a) nemişcat. b) rotit.

Dacă se imprimă o mişcare de rotaţie cu viteza unghiulară ω, electronii liberi vor fi supuşi unei forţe de natură neelectrică, forţa centrifugă. Aceasta determină îndepărtarea spre periferia discului a microparticulelor.

Simultan se va naşte un cîmp de natură electrică şi implicit o forţă electrică care se opune forţei centrifuge.

Pentru că forţa electrică apare din cauza cîmpului electric, se poate imagina un cîmp corespondent forţei neelectrice - în cazul acesta forţa centrifugă - care este un cîmp fictiv şi care se numeşte cîmp electric imprimat, notat cu $\overline{E}_i$.

Purtătorii de sarcină vor ajunge la starea de echilibru atunci cînd cele două cîmpuri, cîmpul electric şi cîmpul electric imprimat vor fi egale şi de sens contrar.

Vectorial se scrie astfel:

$$\overline{E} + \overline{E}_i = 0 \qquad (3.5)$$

Pentru ca purtătorii de sarcină să fie în mişcare, este necesar ca rezultanta forţei electrice şi forţei neelectrice să fie diferită de zero. Implicit, rezultanta celor două cîmpuri va fi diferită de zero.

Se poate scrie astfel:

$$\overline{E} + \overline{E}_i \neq 0 \qquad (3.6)$$

Pentru acelaşi disc aflat în rotaţie, se realizează o legătură printr-un fir conductor între periferia discului şi centrul său (Fig. 3.8.b).

Din cauza cîmpului electric $\bar{E}$ care se va transmite şi prin firul de legătură, purtătorii de sarcină vor reveni în centrul discului pentru a fi din nou acceleraţi spre periferie apărînd astfel o mişcare a microparticulelor în circuit închis. In acest circuit închis a apărut curentul electric de conducţie.

Pentru că mişcarea purtătorilor de sarcină nu variază în timp, curentul de conducţie este un curent staţionar sau cum s-a arătat în paragrafele anterioare, este un curent continuu.

In interiorul discului există două cîmpuri: cîmpul electric şi cîmpul electric imprimat. In exterior, deci şi în firul conductor, este prezent numai cîmpul electric.

Cîmpul electric imprimat nu este generat numai prin accelerarea microparticulelor. Sînt şi alte condiţii fizice care determină separarea sarcinilor electrice în conductoare. Din punct de vedere al condiţiilor fizice, cîmpurile electrice imprimate se clasifică în:

- cîmpuri imprimate de volum şi de contact.

Cîmpurile imprimate de volum se grupează la rîndul lor în:

- cîmpuri imprimate de acceleraţie;
- cîmpuri imprimate termice;
- cîmpuri imprimate de concentraţie.

Cîmpurile imprimate de contact se împart în:

- cîmpuri imprimate voltaice;
- cîmpuri imprimate termice;
- cîmpuri imprimate galvanice.

3.8.1. Cîmpuri electrice imprimate de acceleraţie

Experienţa prezentată mai sus, cu discul rotitor, pune în evidenţă cîmpul electric imprimat de acceleraţie. Cîmpul imprimat are o simetrie radială şi este orientat de la periferie spre centru.

3.8.2. Cîmpuri electrice imprimate de natură termică

Intr-o bară metalică, încălzită la o extremitate, sub influenţa diferenţei de temperatură, purtătorii de sarcină electrică se vor aglomera în regiunea în care temperatura este mai mică.

Apare un cîmp electric imprimat $\bar{E}_i$, dirijat de la capătul cu temperatură mai mică spre capătul cu temperatură mai ridicată (Fig. 3. 9).

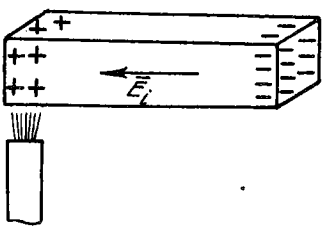


Fig. 3. 9. Cîmp imprimat termic.

3.8.3. Cîmpuri electrice imprimate de concentraţie

Intr-un vas compartimentat printr-un perete poros, se pune acid clorhidric concentrat respectiv acid clorhidric diluat (Fig. 3. 10).

In urma fenomenului de disociere electrolitică, rezultă ioni pozitivi de hidrogen (H^+) şi ioni negativi de clor (Cl^-). Ionii de hidrogen, avînd o mobilitate mai ridicată decît a ionilor de clor, trec mai repede, respectiv în număr mai mare, din compartimentul cu concentraţie ridicată în compartimentul cu concentraţie scăzută.

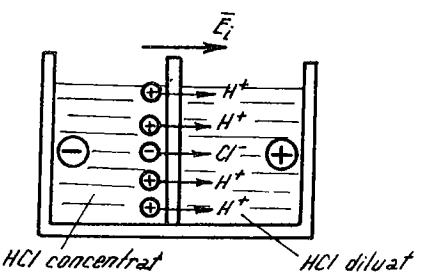


Fig. 3. 10. Cîmp imprimat de concentraţie.

In compartimentul cu H Cl concentrat, apar în exces sarcinile negative iar în celălalt compartiment va fi exces de sarcini pozitive.

Cîmpul electric imprimat va avea sensul indicat în figură.

3.8.4. Cîmpuri electrice imprimate de contact voltaice

Dacă se pun în contact două metale 1 şi 2 (Fig. 3.11), din cauza agitaţiilor termice diferite, are loc o trecere diferită a electronilor liberi dintr-un metal în celălalt. Se separă, în acest fel, sarcinile pe cele două interfeţe ale suprafeţei de contact şi apare un cîmp electric imprimat, îndreptat ca în figură.

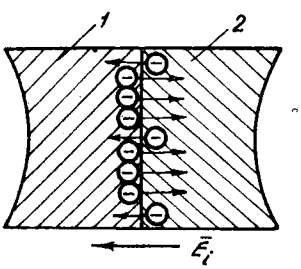


Fig. 3.11. Cîmp imprimat de contact voltaic.

3.8.5. Cîmpuri electrice imprimate de contact termice.

In acest caz sînt puse în contact două metale şi încălzite în cele două puncte de contact (Fig. 3.12). Se realizează temperaturi de încălzire diferite în punctele de contact în care caz, cîmpurile imprimate care apar nu mai sînt egale. Cîmpul imprimat din locul de contact este mai intens dacă încălzirea este mai intensă. Cîmpul imprimat rezultant va fi dat de diferenţa $\bar{E}_i\ (T_a) - \bar{E}_i\ (T_b)$ care va fi cu atît mai mare cu cît diferenţa dintre temperaturile T_a şi T_b va fi mai ridicată.

Pentru aplicaţii tehnice, se realizează un ansamblu compus din două metale puse în contact la cele două capete şi un instrument, denumit milivoltmetru, intercalat în circuit conform Fig. 3.13 . Acest ansamblu reprezintă un termocuplu cu milivoltmetru.

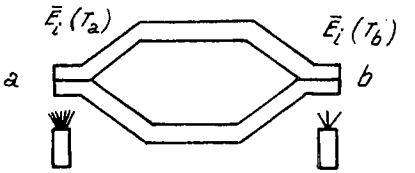


Fig. 3.12. Cîmpuri imprimate termoelectrice de contact.

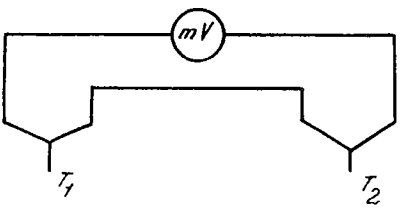


Fig. 3.13. Termocuplu cu milivoltmetru.

Dacă temperaturile la cele două suprafeţe de contact sînt diferite,

T_1 - reprezintă temperatura din interiorul unui cuptor electric de exemplu şi

T_2 - reprezintă temperatura mediului ambiant, atunci tensiunea măsurată cu milivoltmetrul este diferită de zero. Efectul acesta se numeşte efectul Seebeck.

Se scrie:

$$U_e = K\ (T_2 - T_1) \tag{3.7}$$

în care tensiunea măsurată U_e este proporţională cu diferenţa temperaturilor.

Materialele din care se realizează aceste termocuple sînt prezentate în Tabelul 3.2.

Tabelul 3.2

Termocuplul	Temperatura maximă de utilizare (°C)	Tensiunea electromotoare care se obţine pentru $T_1-T_2=100^oC$ (mV)
Constantan - cupru	500	5
Constantan - cromnichel	900	6,2
Constantan - fier	900	5,1
Nichel - cromnichel	(de la 300) 1000	4,1
Platin - platin rodiu	(de la 600) 1600	0,9
Iridiu - iridiu rodiu	2000	0,5
wolfram - wolfram molibden	3000	0,3

Pentru conversia directă a energiei termice în energie electrică, se construiesc în prezent generatoarele termoelectrice sau pilele termoelectrice.

Funcţionarea lor se bazează tot pe efectul Seebeck. Nu sînt răspîndite din cauza puterii obţinute care este mică.

3.8.6. Cîmpuri electrice imprimate de contact galvanice.

Contactul este realizat între un metal şi un electrolit, adică între un conductor de specia întîi şi un conductor de specia a doua.

Dacă se introduce un electrod de cupru într-o soluţie de sulfat de cupru concentrată, la suprafaţa de separaţie dintre cele două conductoare se produc separări de sarcini electrice care dau naştere unui cîmp electric imprimat (Fig. 3.14).

Pentru explicarea procesului se definesc două noţiuni: presiune osmotică şi presiune de dizolvare.

Presiunea osmotică reprezintă tendinţa ionilor pozitivi de metal de a trece din electrolit în electrod iar presiune de dizolvare, tendinţa ionilor pozitivi de metal de a trece din electrod în electrolit.

In cazul contactului dintre cupru şi soluţia de sulfat de cupru concentrată, presiunea osmotică este mai mare decît presiunea de dizolvare ceeace determină ca ionii pozitivi de cupru să treacă din electrolit în electrod, cîmpul imprimat avînd acelaşi sens ca sensul de trecere al acestora.

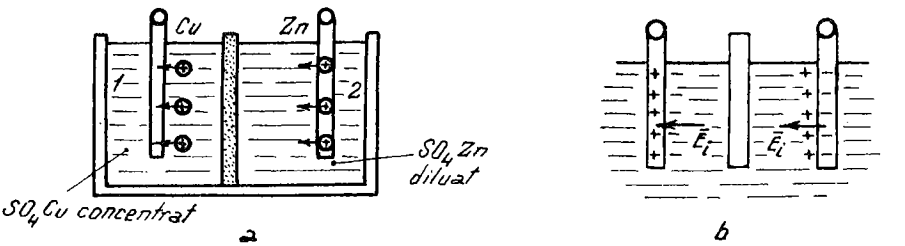


Fig. 3.14. Cîmpuri imprimate de contact, galvanice.

Există şi conductoare la care, atunci cînd sînt puse în contact, procesul se desfăşoară invers. Este cazul electrodului de zinc introdus în soluţie de sulfat de zinc diluată. Aici, presiunea de dizolvare este mai mare ca presiunea osmotică şi din acest motiv ionii pozitivi de zinc trec din electrod în electrolit; cîmpul electric imprimat are sensul orientat de la electrodul de metal spre electrolit.

Dacă în acelaşi recipient se introduc electrozii de cupru şi de zinc cu soluţiile de sulfat de cupru concentrat respectiv sulfat de zinc diluat, efectul este şi mai pronunţat întrucît cele două cîmpuri electrice imprimate care iau naştere dau un cîmp electric imprimat egal cu suma acestora. Acest dispozitiv se numeşte element galvanic şi constituie o sursă de curent electric.

Elementele galvanice sînt de două tipuri: elemente galvanice primare (pile) şi elemente galvanice secundare (acumulatoare).

Elementele galvanice primare sînt ireversibile, adică energia electrică nu poate fi schimbată în energie chimică (prin încărcare).

Elementele galvanice secundare sînt însă reversibile, şi din această cauză funcţionarea lor se caracterizează prin mai multe cicluri de funcţionare.

3.8.7. Elemente galvanice primare (pile electrice)

Corespunzător materialelor din care sînt realizaţi electrolitul şi electrozii, pilele electrice sînt de mai multe tipuri.

Pila Volta. Intr-o soluţie de acid sulfuric diluat sînt cufundaţi doi electrozi, unul de cupru şi celălalt de zinc. (Fig. 3.15).

Dacă se realizează o legătură galvanică între cei doi electrozi printr-un fir conductor, se constată încălzirea acestuia fapt care indică trecerea curentului electric. Sensul curentului electric va fi în exterior de la electrodul de cupru spre cel de zinc; în interiorul sursei, sensul va fi invers adică de la electrodul de zinc spre cel de cupru.

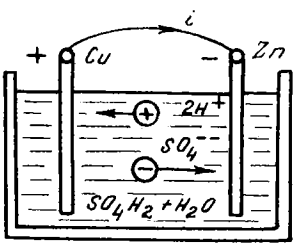


Fig. 3.15. Pila Volta.

In urma disocierii acidului sulfuric, rezultă ioni pozitivi de hidrogen care se îndreaptă spre electrodul de cupru şi ioni negativi de radical care sosesc pe electrodul de zinc. In aceasta constă explicaţia că electrodul de cupru este pozitiv şi cel de zinc negativ. La pila Volta, apare fenomenul de polarizare care constă din scăderea concentraţiei de ioni de hidrogen din apropierea electrodului de cupru.

Tensiunea electromotoare, noţiune pe care o vom defini ulterior, este 1,1 V dar din cauza polarizarii această tensiune electromotoare ajunge la 0,85 - 0,9 V.

Din cauza polarizarii această pilă electrică este complet abandonată.

Pentru înlăturarea fenomenului de polarizare se foloseşte o pilă modificată constructiv şi care este descrisă în continuare.

Pila Daniel. Electrodul de cupru este introdus într-o soluţie concentrată de sulfat de cupru ($Cu\ SO_4$) şi totul într-un vas poros. Acest ansamblu este cufundat într-un vas mai mare din sticlă în care există soluţia diluată de acid sulfuric.

Concentric cu vasul poros se plasează electrodul cilindric de Zinc (Fig. 3. 16).

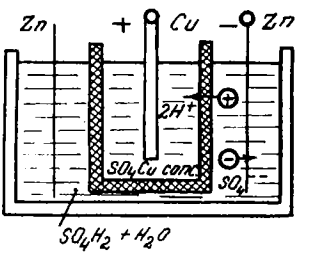


Fig. 3. 16. Pila Daniel.

Ionii pozitivi de hidrogen migrează prin peretele poros şi intră în reacţie cu sulfatul de cupru, eliberîndu-se în acest fel ionii pozitivi de cupru care se depun pe electrodul de cupru.

Pentru că ionii pozitivi de hidrogen nu mai sosesc pe electrodul de cupru, polarizarea este înlăturată.

Ionii de hidrogen pozitivi iau naştere în urma reacţiei dintre acidul sulfuric şi electrodul de zinc.

Tensiunea electromotoare a pilei Daniel este 1,07 V.

Pila Leclanché constă dintr-un electrod de cărbune care constituie electrodul pozitiv şi dintr-un electrod de zinc, sub formă de pahar, care constituie electrodul negativ.

Electrolitul este o soluţie de clorură de amoniu (ţipirig). Pentru evitarea fenomenului de polarizare electrodul de cărbune este introdus într-un săculeţ de pînză poroasă în care există bioxid de mangan (MnO_2) cu rol de depolarizant. Intreg ansamblu este plasat în paharul de zinc în care se află clorură de amoniu.

Tensiunea electromotoare a pilei Leclanché este de 1,5 V. Este foarte utilizată sub formă de pilă uscată fiind robustă şi cu durată mare de func-

ţionare. Se foloseşte pentru alimentarea aparatelor de măsură portabile, aparatelor de radio portabile, calculatoarele de buzunare etc.

Pentru folosirea lor, însă, pilele electrice se compun din mai multe elemente în serie, formînd o baterie.

3.8.8. Elemente galvanice secundare (acumulatoare)

Electrolitul acestor elemente constituie criteriul de clasificare a lor în acide şi alcaline. Acumulatoarele acide sînt acumulatoarele cu plumb iar cele alcaline sînt reprezentate de acumulatoarele fero-nichel şi cadmiu-nichel.

Acumulatoarele cu plumb. Sînt foarte răspîndite deoarece au caracteristici electrice bune şi o tehnologie de fabricaţie mai simplă.

Electrozii sînt executaţi din grătare de plumb care sînt acoperiţi cu paste de oxizi de plumb (miniude plumb Pb_3O_4 şi litargă PbO) iar electrolitul este o soluţie de acid sulfuric diluat cu apă distilată. Recipientul acumulatorului se realizează din sticlă sau din ebonită pentru a rezista la contactul cu electrolitul.

Inaintea utilizării, are loc operaţia de formare care constă în trecerea unui curent continuu prin acumulator şi pe electrodul pozitiv se formează PbO_2 (culoare cafenie) iar pe electrodul negativ se formează plumb spongios (culoare cenuşie).

La descărcare, au loc reacţii chimice care se finalizează cu acoperirea ambilor electrozi cu sulfat de plumb şi diluarea acidului sulfuric (electrolitul) cu apa rezultată din reacţie Se spune că a scăzut concentraţia sau densitatea electrolitului. Tensiunea unui element coboară în timpul descărcării pînă la valoarea de 1,8 V. Descărcarea trebuie oprită la această valoare deoarece pentru tensiuni mai scăzute, reacţiile chimice nu mai sînt reversibile.

La începutul încărcării, electrozii sînt acoperirii cu sulfat de plumb dar în urma reacţiilor chimice se obţine în final acoperirea electrodului pozitiv (anod) cu bioxid de plumb (PbO_2) şi electrodului negativ (catod) cu plumb spongios.

Acidul sulfuric devine concentrat iar tensiunea electromotoare a acumulatorului atinge valoarea 2,6 - 2,7 V.

In funcţionare, după încărcare, tensiunea este 2,2 V dar scade repede la 1,95 V rămînînd aproape constantă pînă la descărcare.

Pentru obţinerea unor tensiuni potrivite, elementele se leagă în serie.

Caracteristicile mai importante ale acumulatoarelor cu plumb sînt:

- Tensiunea nominală (V);
- Capacitatea exprimată în amperi x oră (A h);
- Curentul maxim admisibil debitat (A).

Acest curent maxim nu trebuie depăşit chiar pentru timp scurt deoarece efectele mecanice provocate de acesta pot conduce la deteriorarea plăcilor.

In Fig. 3.17, sînt reprezentate curbele de variaţie a tensiunii şi a concentraţiei electrolitului în timpul încărcării şi descărcării acumulatorului de plumb pentru curent constant.

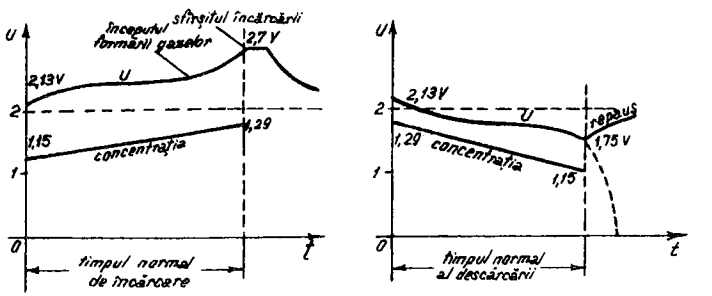


Fig. 3.17. Curbele acumulatorului cu plumb (pentru un element).

Timpul normal de încărcare este de cca. 10 ore ceea ce determină un curent de încărcare egal cu 1/10 din capacitatea acumulatorului.

Sfîrşitul operaţiei de încărcare se constată şi prin intensificarea formării gazelor datorită proceselor chimice din electrolit (acumulatorul fierbe).

Acumulatoarele alcaline. Electrolitul acumulatoarelor alcaline este o soluţie alcalină, hidroxidul de potasiu (KOH). Sînt două tipuri:

- acumulatoarele fero-nichel (Fe-Ni);
- acumulatoarele cadmiu - nichel (Cd-Ni).

Electrozii sînt constituiţi din oţel nichelat pe care se fixează substanţele active.

La electrodul pozitiv, substanţa activă este hidratul de nichel - $Ni(OH)_2$ iar la electrodul negativ, substanţa activă este:

- fier la acumulatoarele Fe - Ni;
- cadmiu spongios şi fier (15%) la acumulatoarele Cd - Ni. Vasul şi capacul sînt din tablă de oţel nichelat, sudate.

Tensiunea electromotoare a acumulatoarelor alcaline are valoarea de 1,41 V la Fe-Ni şi 1,38 V la Cd-Ni.

Acumulatoarele alcaline au randament scăzut 55%. Ca avantaje faţă de cel cu plumb se notează:

- este uşor transportabil;
- nu emană vapori;
- nu necesită întreţinere deosebită.

3.9. Generatorul electric (Sursa electrică). Tensiunea electromotoare

Dispozitivul în care au loc separările de sarcină electrică, datorate cîmpului electric imprimat, reprezintă generatorul electric (sursa electrică). Din punct de vedere al condiţiilor fizice care dau naştere cîmpului electric imprimat, generatoarele electrice pot fi: mecanice, chimice, termice.

Considerăm un astfel de generator electric reprezentat în Fig. 3.18.

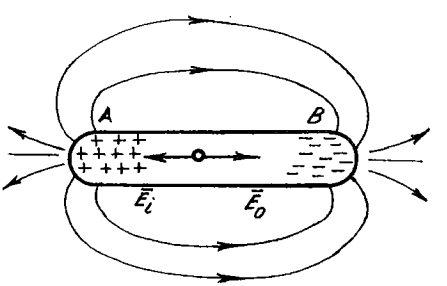


Fig. 3.18. Generator electric .

Separarea sarcinilor electrice pe cele două borne, A pozitivă şi B negativă, este realizată de cîmpul imprimat $\vec{E}_i$. Ca urmare a separării, se naşte cîmpul electric $\vec{E}_o$ ale cărui linii de cîmp se închid de la borna pozitivă A la borna negativă B prin interiorul generatorului electric dar şi prin aer.

La echilibru, cînd separarea sarcinilor electrice s-a realizat, se poate scrie:

$$E_o = E_i \text{ (în interiorul generatorului)} \tag{3.8}$$

sau vectorial (cîmpurile în interiorul generatorului au aceeaşi direcţie dar sensuri opuse).

$$\vec{E}_o = -\vec{E}_i \tag{3.8a}$$

Relaţia arată că în circuit deschis (bornele A şi B nu sînt legate printr-un conductor) intensitatea cîmpului electric are aceeaşi mărime dar sens contrar faţă de intensitatea cîmpului electric imprimat.

Cînd circuitul este deschis, generatorul este în gol.

Dacă se consideră cîmpul omogen, în interiorul sursei, atunci se scrie:

$$E_o \; l_{AB} = E_i \; l_{AB}. \tag{3.9}$$

In care: $$E_i \; l_{AB} = e \tag{3.10}$$

reprezintă tensiunea electromotoare a generatorului

iar $$E_o \; l_{AB} = U_{AB} = U_{borne} = U_b \tag{3.11}$$

este tensiunea electrică la bornele generatorului care este aceeaşi oricare ar fi drumul pe care se calculează această tensiune electrică; prin interiorul generatorului electric sau prin exteriorul acestuia adică prin aer.

Relaţia (3.3) se scrie, în notaţiile de mai sus,

$$e = U_b \tag{3.12}$$

respectiv tensiunea între bornele generatorului electric este egală cu tensiunea electromotoare atunci cînd generatorul este în circuit deschis (în gol). Tensiunea electromotoare se mai notează prescurtat cu E, U_e, u_e.

Simbolurile grafice utilizate pentru generatorul electric de curent de conducţie staţionar (curent continuu) sînt reprezentate în Fig. 3.19.

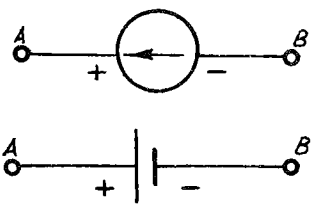


Fig. 3.19. Simboluri grafice pentru generatorul electric.

In tabelul 3.3. sînt prezentate caracteristicile electrice şi constructive a cîtorva pile electrice care se folosesc ca surse electrice în aplicaţiile practice.

Tabelul 3.3

Tipul pilei	Tensiunea electromotoare E (V)	Construcţia			
		Catodul	Electrolitul	Depolarizantul	Anodul
Volta	0,85 - 0,90	Zinc	Soluţie acid sulfuric	-	Cupru
Daniel	1,08	Zinc	Soluţie sulfat de zinc	Soluţie sulfat de cupru	Cupru
Leclanché	1,5	Zinc	Soluţie clorură de amoniu	Bioxid de mangan	Cărbune
Bunsen	1,9	Zinc	Soluţie acid sulfuric	Acid azotic	Cărbune
Poggendorf	20,1	Zinc	Soluţie acid sulfuric	Soluţie bicromat de potasiu	Cărbune

3.10. Legile electrocineticii

Pentru înţelegerea şi explicarea fenomenelor care aparţin domeniilor dintr-o ştiinţă s-au stabilit relaţii cunoscute sub numele de legi.

Acestea exprimă cele mai generale adevăruri demonstrate pe cale experimentală şi care nu se deduc prin analiză logică.

Prin analiză logică se deduc din legi, relaţiile care poartă denumirea de teoreme.

In electrocinetică, capitol important al electrotehnicii, se întîlnesc următoarele legi şi teoreme:

- legea de conservare a sarcinii electrice;
- legea conducţiei electrice;
- teorema potenţialului electric staţionar;
- legea transformării de energie în conductoare parcurse de curenţi de conducţie.

3.10.1. Legea de conservare a sarcinii electrice

In regim electrostatic, sarcinile electrice se conservă, adică nu există o deplasare a lor către exterior; acestea se păstrează pe corpul aflat în stare de electrizare.

In electrocinetică, sarcinile electrice se află în mişcare dar nu se produce o schimbare a lor într-o altă formă a materiei de exemplu în cîmp electric.

Se poate stabili experimental o relaţie între curentul electric de conducţie - care reprezintă mişcarea ordonată a purtătorilor de sarcină şi cantitatea totală de sarcini electrice acumulate, de exemplu, pe armăturile unui condensator electric.

Să considerăm următoarea experienţă:

Pe armăturile unui condensator electric se află sarcini electrice, pozitive pe armătura pozitivă şi negative pe cealaltă armătură.

Se leagă cele două armături printr-un conductor electric (Fig. 3.20).

Imediat se constată încălzirea conductorului, consecinţă a curentului de conducţie stabilit prin acest conductor; sensul este de la armătura pozitivă la armătura negativă a condensatorului.

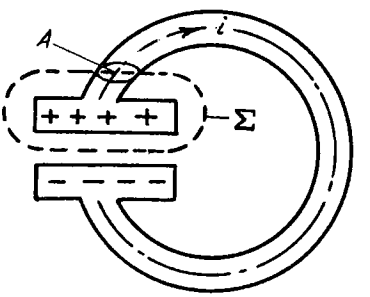


Fig. 3.20. Condensator electric legat prin conductor.

Se consideră două momente t_1 şi t_2.

La momentul t_1 pe armătură respectiv în interiorul suprafeţei închise Σ există sarcina q_1 iar la t_2, sarcina q_2. Intre momentele t_1 şi t_2 există o modificare a sarcinii electrice :

$$q_2 - q_1 = -\Delta q_{\Sigma}$$

Semnul minus este o consecinţă a faptului că sarcina electrică scade şi $q_2 < q_1$.

Raportul $\frac{q_2 - q_1}{t_2 - t_1} = \frac{-\Delta q_{\Sigma}}{\Delta t}$ reprezintă curentul electric i_{Σ} care trece prin suprafaţa Σ spre exterior, adică:

$$i_{\Sigma} = -\frac{\Delta q_{\Sigma}}{\Delta t} \qquad (3.13)$$

Această relaţie exprimă legea de conservare a sarcinii electrice cu următorul enunţ:

Viteza de scădere a sarcinii electrice din interiorul unei suprafeţe închise este egală cu intensitatea curentului de conducţie care iese din interiorul suprafeţei.

In regim electrostatic, nu avem curent de conducţie, adică $i_{\Sigma} = 0$.

Deci şi $$\Delta q_{\Sigma} = 0 .$$

Rezultă că $q_{1\Sigma} = q_{2\Sigma} = \text{constant}$. (3.14)

Sarcina electrică a unui sistem izolat, fără legătură cu exteriorul, este constantă în regim electrostatic.

In regim electrocinetic, nu există acumulări de sarcină electrică şi deasemenea:

$$\Delta q_{\Sigma} = 0$$

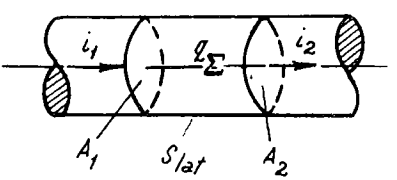


Fig. 3.21. Suprafaţa închisă a conductorului electric.

In acest regim se consideră ca suprafaţă închisă Σ, suprafaţa totală compusă din suprafeţele parţiale A_1, A_2 şi S_{lat} (Fig. 3.21).

In interiorul acestei suprafeţe, sarcinile se vor schimba de la un moment la alt moment (regimul este electrocinetic) dar cantitatea totală de sarcini electrice va fi la momentele t_1, $t_2 \ldots t_n$ aceeaşi, adică:

$$q_{\Sigma t1} = q_{\Sigma t2} = \ldots = q_{\Sigma t_n} = \text{const.}$$

Rezultă $\dfrac{\Delta q_{\Sigma}}{\Delta t} = 0$ deoarece $\Delta q_{\Sigma} = 0$.

Deci : $$i_{\Sigma} = 0 .$$ (3.15)

Enunţul acestei relaţii este: suma algebrică a curentului de conducţie care străbate suprafaţa Σ este zero.

Dacă se adoptă semnul plus pentru curentul care părăseşte suprafaţa Σ şi semnul minus pentru curentul care intră în suprafaţa Σ, rezultă că:

$$i_{\Sigma} = i_2 - i_1 = 0 .$$

Adică: $i_1 = i_2$,

respectiv suma algebrică a curenţilor printr-o suprafaţă închisă este zero.

Din relaţia 3.15 se deduce şi teorema întîi a lui Kirchhoff după cum se va prezenta ulterior.

3.10.2. Legea conducţiei electrice

In urma experienţelor, s-a stabilit că între curentul şi tensiunea electrică dintr-o porţiune de circuit există o relaţie matematică cunoscută sub denumirea de legea lui Ohm.

Ulterior, tot pe baza unor constatări experimentale şi pe anumite considerente teoretice cu privire la aspectele microscopice ale conducţiei electrice, s-a elaborat legea conducţiei electrice. Enunţul este următorul:

In orice material şi în orice regim, densitatea curentului electric de conducţie $\bar{J}$ este orientată şi proporţională cu suma intensităţii cîmpului electric $\bar{E}$ şi a intensităţii cîmpului electric imprimat $\bar{E}_i$ din acelaşi punct şi din acelaşi moment.

$$\bar{J} = \sigma (\bar{E} + \bar{E}_i) \qquad (3.16)$$

sau

$$\bar{E} + \bar{E}_i = \rho \bar{J} . \qquad (3.16\ a)$$

Mărimea σ se numeşte conductivitate electrică iar mărimea

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

se numeşte rezistivitate electrică.

Aceste două mărimi sînt mărimi de material dependente de natura şi starea materialului (presiune, temperatură etc.).

Unitatea de măsură în S I pentru rezistivitate este Ωm şi se deduce din relaţia dimensională:

$$[\rho] = [E]/[J] \tag{3.17}$$

In sistemul internaţional S I se scrie astfel:

$$\frac{1\ V/m}{1\ A/m^2} = 1\ \Omega m$$ în care s-a notat

$$\frac{1 \text{ volt}}{1 \text{ amper}} = 1 \text{ ohm } [1\Omega].$$

In practică se foloseşte şi $\frac{\Omega mm^2}{m}$

Unitatea de măsură în S I pentru conductivitatea electrică este $1\ (\Omega m)^{-1} = \frac{1 \text{ siemens}}{1 \text{ m}} = \frac{1\ S}{m}$ unde s-a notat $1\ (\text{ohm})^{-1} = 1$ siemens (S).

Dependenţa rezistivităţii unui conductor faţă de temperatură are expresia matematică următoare :

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \alpha (T - T_0)\right] \tag{3.18}$$

în care:

ρ_0 este rezistivitatea la temperatura T_0;

ρ este rezistivitatea la temperatura T;

α - coeficient de temperatură şi este o constantă de material.

In tabelul 3.4. sînt prezentate valorile rezistivităţii electrice la 20^oC şi coeficientul de temperatură la 20^oC.

Tabelul 3.4

Material	ρ_{20° $\left[\Omega \frac{mm^2}{m}\right]$	α_{20° $[1/^\circ C]$	Material	ρ $\left[\Omega \frac{mm^2}{m}\right]$	α_{20° $[1/^\circ C]$
Alamă	0,07	0,002	Mangan	0,42	0,00001
Aluminiu	0,026	0,004	Mercur	0,958	0,0009
Argint	0,016	0,0036	Nichel	0,07	0,006
Aur	0,024	0,0037	Oţel	0,1	0,006
Bronz fosforos	0,115	0,004	Platină	0,1	0,003
Cărbune	60 - 80	-0,0002 -0,0008	Plumb	0,21	0,004
Constantan	0,49	0,000004	Staniu	0,11	0,0044
Cromnichel	1,1	0,00015	Wolfram	0,055	0,005
Cupru	0,0175	0,004	Zinc	0,06	0,004

Din tabel se constată că în urma ordonării materialelor după valorile crescătoare ale rezistivităţii electrice, rezultă următorul şir: argint, cupru, aur, aluminiu, molibden, zinc, wolfram, tantal, fier, cobalt, nichel etc.

Pentru cupru pur şi aluminiu pur, rezistivitatea electrică are următoarele valori:

$$\rho_{cu\ 20^\circ} = \frac{1}{57}\ \Omega\ \frac{mm^2}{m} : \rho_{Al\ 20^\circ} = \frac{1}{33}\ \Omega\ \frac{mm^2}{m}$$

Cazuri particulare ale legii conducţiei electrice

a) $\bar{E} = \bar{E}_i \neq 0; \bar{J} = 0; \rho \neq 0$. Sursa electrică în gol. Cazul acesta corespunde generatorului electric la funcţionarea în gol, adică bornele sale nu sînt legate printr-un conductor electric (Fig. 3.22).

Din relaţia (3.16 a) se obţine că $\bar{E}_i + \bar{E} = 0$ sau sub formă scalară

$$E_i = E.$$

Considerînd cele două cîmpuri electrice uniforme şi omogene şi multiplicînd cu l_{AB} se obţine:

$$E_i \, l_{AB} = E \, l_{AB}$$

Dar:

$E_i \, l_{AB} = e$ reprezintă tensiunea electromotoare

şi $E \, l_{AB} = u_b$ reprezintă tensiunea la borne.

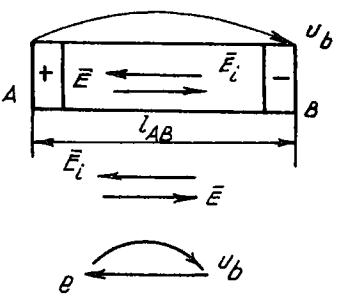


Fig. 3.22. Sursa electrică în gol.

Astfel că relaţia respectivă devine:

$$e = u_b \tag{3.19}$$

b) $\bar{E} \neq 0$; $\bar{E}_i = 0$; $\bar{J} \neq 0$; $\rho \neq 0$. Conductor omogen fără cîmp electric imprimat. (Legea lui Ohm). In acest caz relaţia matematică apare numai între cîmpul electric şi curentul dintr-o porţiune de conductor (Fig. 3.23) respectiv între tensiunea electrică şi curentul electric din conductorul respectiv.

Legea conducţiei electrice se scrie în acest caz particular.

$$\bar{E} = \rho \bar{J}$$

sau scalar:

$$E = \rho J$$

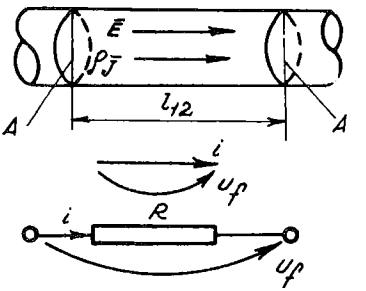


Fig. 3.23. Conductor fără cîmp electric imprimat.

Se consideră cîmpul uniform şi omogen iar densitatea de curent uniformă pe secţiunea A.

Se multiplică cu l_{12} - lungimea între cele două secţiuni - şi se înlocuieşte densitatea de curent prin relaţia cunoscută (3.1 b):

$$J = \frac{i}{A}$$

Se obţine : $$E\, l_{12} = \rho\, l_{12}\, \frac{i}{A} \,. \qquad (3.20)$$

Dar $E\, l_{12}$ reprezintă tensiunea de-a lungul firului între secţiunea 1 şi 2 adică

$$E\, l_{12} = u_f \qquad (3.21)$$

iar $$\frac{\rho\, l_{12}}{A} = R \qquad (3.22)$$

este <u>rezistenţa electrică</u> a porţiunii de conductor considerate, astfel că relaţia (3.20) devine:

$$u_f = R\, i \,. \qquad (3.23)$$

Această relaţie reprezintă <u>legea lui Ohm.</u>

Din relaţia 3.22, rezultă că unitatea de măsură în sistemul S I pentru rezistenţa electrică este 1 ohm ($1\,\Omega$):

$$[R] = [\rho]\,\frac{[l]}{[A]}$$

sau $$1\ \Omega\ \text{m}\ \frac{1\ \text{m}}{1\ \text{m}^2} = 1\Omega\ (\ 1\ \text{ohm}\ ).$$

Simbolul rezistenţei electrice este redat de asemenea în Fig. 3.23.

Valoarea inversă a rezistenţei se numeşte conductanţă electrică: $G = \frac{1}{R}$ şi unitatea de măsură în S.I. este 1 siemens (S) $1\ S = 1\ (\text{ohm})^{-1} = \Omega^{-1}$.

c) $\bar{E}_i \neq \bar{E} \neq 0$; $J \neq 0$; $\rho \neq 0$ Sursa electrică în sarcină.

Distingem două posibilităţi:

1 c) $\bar{E}_i > \bar{E}$ - Sursa electrică în regim de generator;

2 c) $\bar{E}_i < \bar{E}$ - Sursa electrică în regim de receptor.

1 c) Considerăm Fig. 3.24 în care relaţia(3.16 a) se scrie sub forma scalară, astfel:

$$E_i - E = \rho J$$

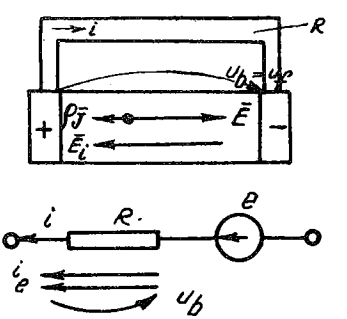


Fig. 3.24. Sursa electrică în regim de generator.

Dacă se multiplică cu l_{AB} şi se înlocuieşte densitatea de curent prin expresia

$$J = \frac{i}{A_g}$$

unde A_g - reprezintă secţiunea sursei electrice prin care deńsitatea de curent J este uniform repartizată, se obţine:

$$E_i \cdot \ell_{AB} - E\ l_{AB} = \rho\ l_{AB}\ \frac{i}{A_g} \quad . \tag{3.24}$$

Dar: $E_i\ l_{AB} = e$ - tensiunea electromotoare a sursei

şi $E\ l_{AB} = u_b$ - tensiunea electrică la bornele sursei.

Astfel, relaţia (3.24) devine:

$$e - u_b = R_g\ i$$

sau

$$e = u_b + R_g\ i \tag{3.25}$$

în care s-a notat cu R_g, rezistenţa internă a sursei.

Tensiunea la bornele generatorului în această situaţie este egală cu tensiunea la bornele firului conductor, astfel că relaţia (3.25) se mai scrie:

$$e = u_f + R_g\ i \tag{3.26}$$

Dar conform (3.23), $u_f = R\,i$.

Deci

$$e = (R + R_g)\ i \tag{3.27}$$

şi curentul electric:

$$i = \frac{e}{R + R_g} \quad . \tag{3.28}$$

Acestei relaţii îi corespunde circuitul prezentat în Fig. 3.25 Sensurile de referinţă ale curentului şi tensiunii la borne au fost asociate după regula de la generatoare.

2 c) - Considerăm Fig. 3.26 în care relaţia (3.16 a) se scrie sub formă scalară:

$$E - E_i = \rho J .$$

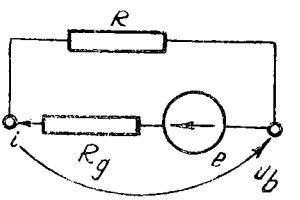


Fig. 3.25. Sursa electrică în regim de generator.

Aceasta, corespunde situaţiei în care sursa electrică este alimentată de la o altă sursă cu o tensiune electromotoare mai mare de cît a acesteia.

Se obţine relaţia:

$$u_b = e + R_g\, i \qquad (3.29)$$

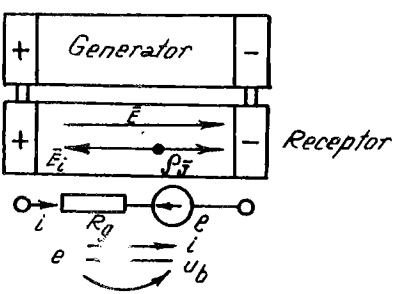


Fig. 3.26. Sursa electrică în regim de receptor.

Aici, sensurile de referinţă ale curentului şi tensiunii la borne au fost asociate după regula de la receptoare.

Intradevăr, dacă se consideră conductorul omogen, lipsit de surse de cîmp imprimat adică e = 0, se obţine relaţia:

$$u_b = Ri$$

dedusă şi în cazul conducţiei electrice printr-un fir conductor deoarece tensiunea în fir u_f este egală cu tensiunea la borne:

$$u_f = u_b$$

d) - $\bar{E}_i \neq \bar{E} \neq 0$; $\bar{J} \neq 0$ dar $\rho = 0$ Generatorul ideal de tensiune (Fig. 3.27). Legea conducţiei electrice se scrie în acest caz:

$$\bar{E} + \bar{E}_i = 0$$

sau scalar $E = E_i$

respectiv $u_b = e$. (3.30)

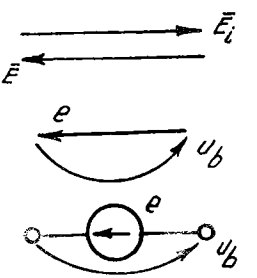


Fig. 3.27. Generatorul ideal de tensiune.

Sursa electrică reprezintă un generator ideal de tensiune.

e) $\bar{E}_i \neq \bar{E} \neq 0$; $J \neq 0$ dar $\sigma = 0$. Generatorul ideal de curent. (Fig. 3.28). In acest caz există cîmp electric imprimat, conductivitatea este considerată nulă dar generatorul asigură în circuit curentul $i_g = i$. (3.31)

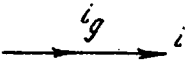


Fig. 3.28. Generatorul ideal de curent.

Sursa electrică reprezintă un generator ideal de curent.

Toate aceste expresii matematice prezentate nu sînt decît particularizări ale legii conducţiei electrice exprimată sub o altă formă, forma integrală a legii conducţiei electrice.

Această formă integrală este:

$$u_f + e_i = Ri \tag{3.32}$$

în care:

u_f - tensiunea în fir;

e_i - tensiunea electrică imprimată (tensiunea electromotoare);

$R = \frac{\rho l}{A}$ - rezistenţa porţiunii de conductor considerate;

i - curentul electric uniform repartizat prin secţiunea conductorului.

3.10.3. Legea transformării energiei în conductoare parcurse de curenţi electrici (Legea Joule-Lenz).

Experimental se constată că la trecerea curentului electric printr-un conductor, acesta se încălzeşte. Fenomenul este cunoscut sub denumirea de efect termic al curentului sau efect Joule-Lenz şi este o consecinţă a transformării energiei cîmpului electric în energie calorică. Transformarea se face conform unei legi cunoscută sub denumirea de legea transformării de energie în conductoare parcurse de curenţi de conducţie.

Enunţul este următorul:

Puterea cedată unităţii de volum a unui conductor de către cîmpul electric, în procesul de conducţie, este egal cu produsul scalar între intensitatea cîmpului electric şi densitatea curentului,

adică $$p_J = \bar{E}\ \bar{J}\ \ (W/m^3) \qquad (3.33)$$

în care:

p_J este densitatea de volum a puterii cedate de cîmpul electric conductorului;

$\bar{E}$ - intensitatea cîmpului electric în conductor;

$\bar{J}$ - densitatea curentului electric prin conductor.

In sistemul Internaţional S I unitatea de măsură a acestei densităţi de putere este watt pe metru cub ($1\ W/m^3$).

Cunoscînd puterea cedată pe unitatea de volum a conductorului, se poate determina puterea cedată sub formă de căldură unei porţiuni din conductorul respectiv. Considerăm o porţiune de conductor cu aceeaşi secţiune transversală A şi determinăm puterea cedată de cîmpul electric pe lungimea l_{12} (Fig. 3.29). Densitatea de volum a puterii este:

$$p_J = EJ.$$

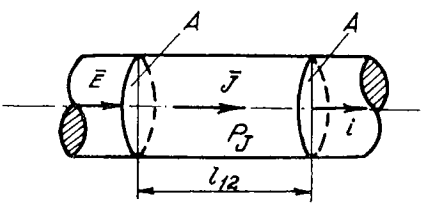


Fig. 3.29. Puterea cedată de cîmpul electric
într-un conductor.

Puterea cedată de cîmpul electric conductorului de lungime l_{12} şi secţiune A se obţine înmulţind densitatea de volum a puterii cu volumul conductorului:

$$P_J = p_J\ l_{12}\ A = E\ l_{12}\ JA = u_{12}\ i \quad (W) \qquad (3.34)$$

în care s-a înlocuit $E\ l_{12} = u_{12}$ tensiunea în conductor pe lungimea l_{12} şi $i = JA$ curentul de conducţie prin conductor.

Enunţul este următorul:

Puterea cedată de cîmpul electric unei porţiuni de conductor în procesul de conducţie electrică este egală cu produsul dintre intensitatea curentului şi tensiunea electrică între capetele porţiunii considerate.

Relaţia se mai poate scrie, înlocuind tensiunea

$$u_{12} = u_f = u_b = Ri ,$$

astfel:
$$P_J = Ri^2 = \frac{u_{12}^2}{R} = \frac{u_b^2}{R} = G u_b^2 \quad [W] \tag{3.35}$$

sau

$$P_J = P_R \text{ în care } P_R = Ri^2 .$$

Corespunzător expresiei, s-a elaborat schema din Fig. 3.30.

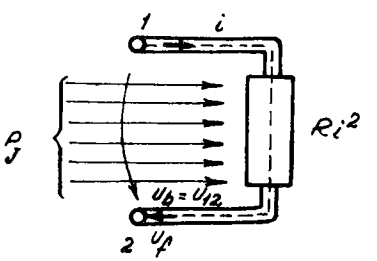


Fig. 3.30. Puterea cedată de cîmpul electric unui conductor.

In cazul în care între bornele 1 şi 2 există şi o sursă de cîmp electric imprimat, puterea primită la borne prin intermediul cîmpului electric şi cedată conductorului de rezistenţă electrică R, poate fi majorată sau diminuată cu puterea sursei dintre bornele respective.

Distingem prin urmare două cazuri:

Cazul a) Fig. 3.31.

$$P_J + P_g = Ri^2 \tag{3.36}$$

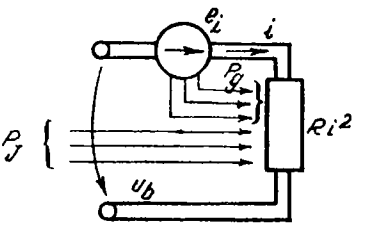


Fig. 3.31. Cazul a) e_i şi i au acelaşi sens.

Se enunţă astfel: pentru acoperirea pierderii de energie prin efect Joule - Lenz se transformă atît energia electrică primită pe la borne cît şi aceea a sursei de cîmp electric imprimat (sursa cedează energie, respectiv se descarcă)

Cazul b) Fig. 3.32.

$$P_J = Ri^2 + P_g \tag{3.37}$$

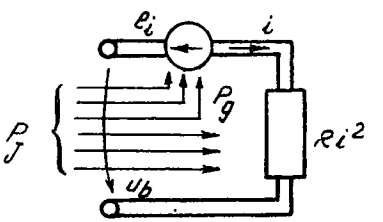


Fig. 3.32. Cazul b) e_i şi i au sensuri opuse.

In acest caz energia cedată de cîmpul electric pe la borne acoperă atît efectul Joule-Lenz din conductor, cît şi creşterea energiei sursei de cîmp electric imprimat - (sursa primeşte energie; dacă este acumulator electric se încarcă).

In relaţiile (3.36) şi (3.37) s-a notat cu P_g puterea primită respectiv cedată de sursă. Este egală cu :

$$P_g = e_i i \tag{3.38}$$

Microscopic, acest fenomen se explică astfel:

Cîmpul electric transmite energie particulelor microscopice libere care constituie "gazul electronic". In urma ciocnirilor dintre acestea şi atomii reţelei cristaline, creşte agitaţia termică a atomilor care la scară macroscopică se evidenţiază prin creşterea temperaturii conductorului.

Pentru a nu se depăşi încălziri admisibile ale conductoarelor electrice, se prescriu prin tabele densităţile de curent maxim admise. Astfel în Tabelul 3.5. sînt prezentate densităţile de curent admise pentru conductoare de cupru cu secţiuni folosite în aplicaţiile practice.

Tabelul 3.5

Secţiunea S (mm^2)	Conductor cupru izolat J (A/mm^2)	Conductor cupru neizolat	
		In încăperi J (A/mm^2)	In exterior J (A/mm^2)
4	9	14,2	14,2
6	7,7	12,2	12,6
10	6,8	10,3	10,8
16	5,7	8,1	9,4
25	4,9	6,6	8,2
35	4,3	6,0	7,7
50	3,8	5,3	6,7
70	3,5	4,8	6,1
95	3,1	4,3	5,4

Se observă că la secţiuni mai mari, densitatea de curent este mică. La dimensionarea conductoarelor pe bază de încălzire se demonstrează că în cazul a două conductoare de diametre d_1 respectiv d_2, există următoarea laţie între densităţile de curent J_1 şi J_2:

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{d_2}{d_1} \qquad (3.39)$$

3.10.4. Aplicaţii în tehnică ale efectului electrocaloric

Siguranţe fuzibile. Se folosesc pentru protecţia circuitelor electrice. Deconectează sau separă circuitul electric atunci cînd curentul electric depăşeşte o anumită valoare. Elementul important al siguranţei îl constituie fuzibilul. Acesta este un conductor cilindric sau o plăcuţă care din cauza efectului caloric al curentului electric se topeşte deoarece reprezintă porţiunea de circuit cea mai slabă din punct de vedere termic. Este necesar ca acest fuzibil să reziste termic timp îndelungat la curentul nominal dar să se topească instantaneu la curenţi periculoşi. Puterea degajată prin efectul Joule-Lenz determină creşterea temperaturii elementului fuzibil pînă cînd se atinge punctul de topire sau fuziune.

Elementul fuzibil se realizează din materiale ca: argintul, cuprul, zincul, aliaje de staniu şi cadmiu. Cuprul se cositoreşte sau se argintează pentru a nu se oxida în timpul funcţionării normale fapt care ar provoca micşorarea secţiunii.

Caracteristicile importante ale siguranţelor fuzibile sînt: curentul nominal al siguranţei, curentul nominal al fuzibilului, caracteristica de topire

Caracteristica de topire reprezintă dependenţa duratei de topire a elementului fuzibil al siguranţei de curentul care trece prin el. (Fig. 3.33).

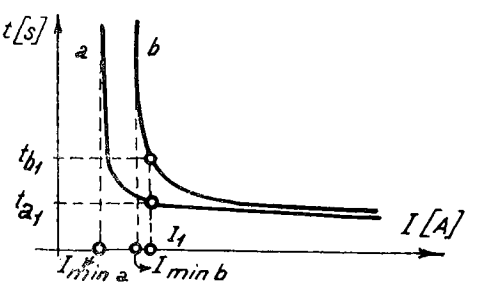


Fig. 3.33. Caracteristica de topire a elementului fuzibil.

In această figură, se reprezintă caracteristicile de topire a două elemente fuzibile a şi b pentru curenţi nominali diferiţi.

$$I_{min\ a} < I_{min\ b}$$

Un curent I_1 va topi elementele fuzibile la timpi diferiți $t_{a1} < t_{b1}$. Același curent de suprasarcină va topi mai repede elementul fuzibil al cărui curent nominal este mai mic. Acest fapt se folosește pentru asigurarea funcționării selective a siguranțelor fuzibile.

După caracteristica de topire se deosebesc: siguranțe rapide și siguranțe lente. La siguranțele fuzibile rapide, timpul de topire este foarte scurt la un anumit supracurent.

La siguranțele lente prin măsuri constructive adecvate se obține un timp de topire relativ lung la supracurenți mici (suprasarcină), respectiv un timp de topire scurt la supracurenți mari (scurtcircuite).

In tabelul 3.6 sînt redați curenții minimi de topire și diametrele firelor fuzibile din diferite materiale (situate în aer).

Tabelul 3.6

Curentul de topire (A)	Diametrul firului, în mm				
	Argint	Cupru	Cositor	Plumb	Oțel
1	-	0,05	0,19	0,21	0,12
2	-	0,09	0,29	0,33	0,19
3	-	0,11	0,36	0,43	0,25
4	-	0,14	0,46	0,52	0,30
5	0,14	0,16	0,56	0,60	0,42
10	0,25	0,25	0,85	0,95	0,55
15	0,40	0,33	1,11	1,25	0,72
25	0,51	0,46	1,59	1,75	1,01

Ciocane de lipit cu rezistențe electrice. Aceste dispozitive, foarte răspîndite în industria electronică, funcționează tot pe baza efectului electrocaloric. O rezistență din fir sau plăcuță de nichelină transmite căldura dezvoltată unui vîrf de cupru prin intermediul căruia se topește aliajul de lipit (plumb aliat cu cositor).

Lămpi electrice cu incandescență. Corpul incandescent este filamentul care se încălzește la trecerea prin el a curentului electric, la o temperatură de cca. $2000^{o}C$.

La această temperatură, lumina devine albă . Materialul folosit pentru filament este wolframul deoarece rezistă la această temperatură, este rezistent din punct de vedere mecanic, se evaporă lent.

O altă aplicaţie a efectului electrocaloric, este sudarea electrică.

3.11. Circuite de curent continuu

Circuitul electric reprezintă un ansamblu de medii prin care circulă curent electric. Aceste medii au fost prezentate şi sînt: conductoare, semiconductoare şi dielectrice. In conductoare şi semiconductoare se constată prezenţa curentului de conducţie; în dielectrici există numai curent de deplasare.

Circuitul electric în care curenţii şi tensiunile au valori invariabile în timp se numeşte circuit de curent continuu.

Componentele care alcătuiesc un circuit electric se numesc elemente de circuit. In curent continuu aceste elemente sînt: sursa electrică şi rezistorul.

Elementele de circuit cu două borne de acces se numesc elemente dipolare.

In circuitele electrice de curent continuu sînt reprezentate elemente ideale de circuit: surse ideale şi rezistorul ideal.

Pentru caracterizarea elementelor de circuit se utilizează relaţia dintre tensiunea U de la borne şi curentul I care circulă prin element.

Reprezentarea grafică a acestei relaţii, în planul U-I, se numeşte caracteristica tensiune - curent a elementului de circuit.

Dacă această caracteristică tensiune -curent este o dreaptă, elementul de circuit este liniar (Fig. 3.34).

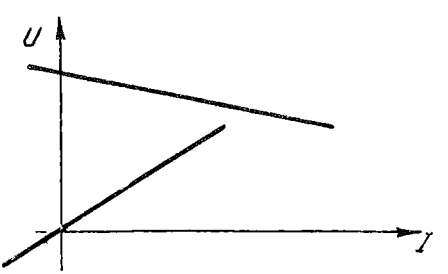


Fig. 3.34. Caracteristica tensiune-curent a elementului liniar.

In cazul în care această caracteristică este o curbă diferită de o dreaptă, elementul de circuit este neliniar. (Fig. 3.35)

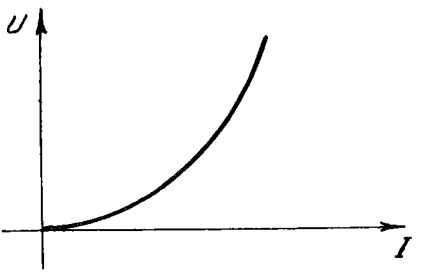


Fig. 3.35. Caracteristica tensiune - curent a elementului neliniar.

Elementele reale de circuit sînt în general neliniare dar prin aproximarea caracteristicii lor cu o dreaptă, acestea se consideră liniare.

Elementele de circuit se pot grupa şi sub aspect energetic. Astfel se definesc elemente pasive şi elemente active.

Elementul de circuit de curent continuu pasiv este elementul care nu poate ceda în circuit energie electrică în nici un regim de funcţionare; acesta primeşte energie electrică. Rezistorul este element pasiv.

Elementul de circuit de curent continuu activ generează energie electrică în anumite regimuri de funcţionare; în anumite regimuri de lucru poate primi energie electrică. Sursele electrice sînt elemente active de circuit. Corespunzător, circuitul electric compus numai din elemente pasive se numeşte circuit pasiv. Dacă circuitul conţine cel puţin un element activ, se numeşte circuit activ.

Reprezentarea grafică prin simboluri a elementelor de circuit şi a modului cum acestea sînt conectate între ele se numeşte schemă electrică.

Se vor prezenta elementele ideale liniare de circuit de curent continuu.

3.11.1. Rezistorul ideal este un element de circuit dipolar pasiv la bornele căruia tensiunea este proporţională cu intensitatea curentului care străbate acest element.

Ecuaţia care reprezintă caracteristica rezistorului este :

$$U = RI \qquad (3.40)$$

în care factorul de proporţionalitate R este rezistenţa electrică a rezistorului.

Această ecuaţie se mai scrie:

$$I = G\,U \tag{3.41}$$

în care $G = \frac{1}{R}$ reprezintă conductanţa rezistorului.

Simbolul rezistorului şi caracteristica tensiune - curent sînt reprezentate în Fig. 3.36 şi Fig. 3.37.

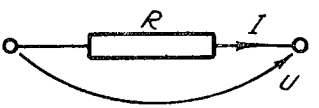


Fig. 3.36. Simbolul rezistorului.

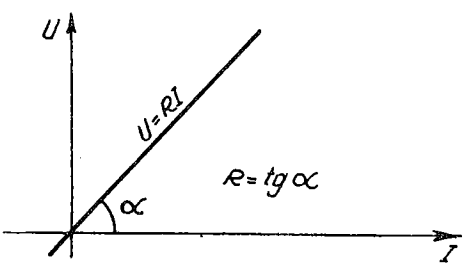


Fig. 3.37. Caracteristica tensiune - curent a rezistorului.

Rezistorul este un element pasiv; puterea $P_R = UI = RI^2 > 0$ este totdeauna pozitivă fiind primită pe la borne. Rezistorul funcţionează numai ca receptor.

Sensurile tensiunii la borne şi ale curentului se asociază conform regulii de la receptoare (vezi Fig. 3.26).

Rezistorul ideal este un rezistor liniar.

3.11.2. Sursa ideală de tensiune sau generatorul ideal de tensiune este elementul de circuit dipolar activ caracterizat printr-o tensiune la borne constantă independentă de curentul care îl parcurge.

Ecuaţia care reprezintă caracteristica sursei ideale de tensiune este

$$U = E \text{ pentru orice } I \ . \tag{3.42}$$

Simbolul sursei ideale de tensiune şi caracteristica tensiune-curent sînt reprezentate în Fig. 3.38 şi Fig. 3.39.

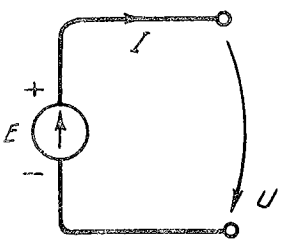


Fig. 3.38. Simbolul sursei ideale de tensiune.

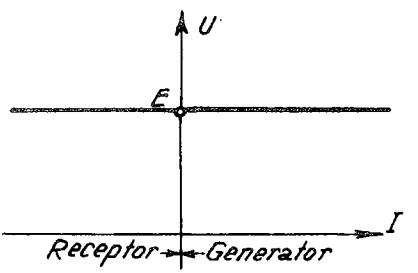


Fig. 3.39. Caracteristica tensiune-curent a sursei ideale de tensiune.

Faţă de sensurile tensiunii E şi curentului I, sursa ideală de tensiune funcţionează în regim de generator atunci cînd curentul I are acelaşi sens cu sensul tensiunii electromotoare E (Fig. 3.38). Puterea generată $P_g = EI > 0$. Sursa funcţionează ca receptor de energie electrică, cînd curentul I are sens contrar cu sensul tensiunii electromotoare E. (Fig. 3.40).

Puterea generată are semnul minus $P_g = EI < 0$, adică este efectiv primită de sursă. Cele două regimuri de funcţionare ale sursei ideale de tensiune se pot deduce şi din caracteristica tensiune - curent (Fig. 3.39). Cînd $I > 0$, sursa furnizează energie electrică (generator) iar pentru $I < 0$ sursa primeşte energie electrică (receptor). Intensitatea I a curentului prin sursă depinde de circuitul în care sursa este conectată.

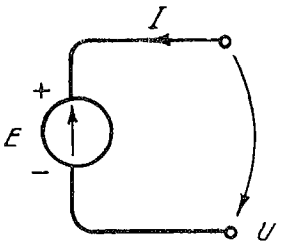


Fig. 3.40. Sursa ideală de tensiune ca receptor.

3.11.3. Sursa ideală de curent sau generatorul ideal de curent este elementul de circuit dipolar activ care debitează în circuit un curent constant independent de tensiunea la borne. Ecuaţia care reprezintă caracteristica sursei ideale de curent este:

$$I = I_g \text{ pentru orice } U. \tag{3.43}$$

Simbolul sursei ideale de curent şi caracteristica tensiune - curent sînt reprezentate în Fig. 3.41 şi 3.42.

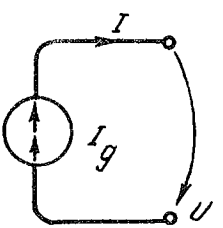


Fig. 3.41. Simbolul sursei ideale de curent.

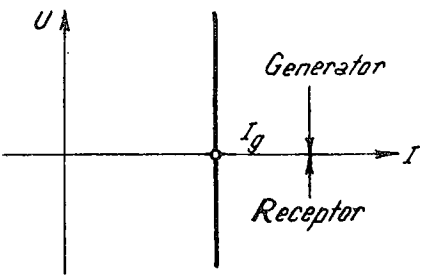


Fig. 3.42. Caracteristica tensiune-curent a sursei ideale de curent.

Faţă de sensurile tensiunii U şi curentului I_g, sursa ideală de curent funcţionează în regim de generator atunci cînd tensiunea U are acelaşi sens cu sensul curentului I_g debitat de sursă. Puterea generată $P_g = UI_g > 0$.

Sursa funcţionează ca receptor de energie electrică, cînd tensiunea U are sens contrar cu sensul curentului Ig (Fig. 3.43).

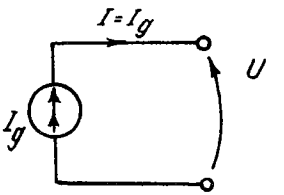


Fig. 3.43. Sursa ideală de curent, ca receptor.

Puterea generată are semnul minus adică este efectiv primită de sursă:

$$P_g = U I_g < 0 .$$

Cele două regimuri de funcţionare ale sursei ideale de curent se pot deduce şi din caracteristica tensiune-curent (Fig. 3.42).

Cînd $U > 0$, sursa furnizează energie electrică (generator) iar pentru $U < 0$, sursa primeşte energie electrică (receptor). Tensiunea U de la bornele sursei de curent depinde de circuitul electric în care este conectată această sursă.

3.11.4. Sursa reală de tensiune.

Nu există în realitate o sursă de tensiune a cărei rezistenţă internă să fie nulă. Sursa reală de tensiune are o rezistenţă internă diferită de zero şi circuitul în acest caz se compune dintr-o sursă ideală de tensiune legată în serie cu un rezistor a cărei rezistenţă electrică este rezistenţa internă a sursei (Fig. 3.44).

Ecuaţia circuitului electric, aplicînd legea conducţiei electrice în circuitul din Fig. 3.44, este

$$U = E - RI \qquad (3.44)$$

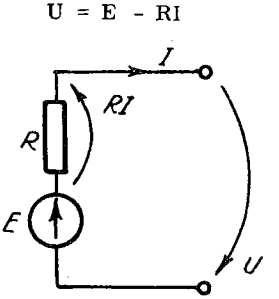


Fig. 3.44. Sursa reală de tensiune.

Caracteristica tensiune - curent este reprezentată de o dreaptă (Figura 3.45).

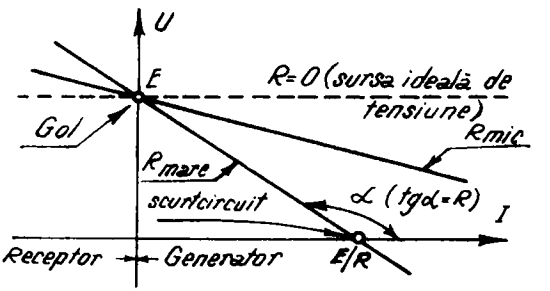


Fig. 3.45. Caracteristica tensiune-curent a sursei reale de tensiune.

Punctul de intersecţie cu axa tensiunii (U = E; I = 0) reprezintă cazul în care sursa nu debitează curent (funcţionarea în gol).

La intersecţia cu axa curentului (U = 0; I = $\frac{E}{R}$) se află punctul care reprezintă cazul în care sursa debitează cel mai mare curent (funcţionare în scurtcircuit). Panta dreptei tg α = R reprezintă valoarea rezistenţei interne a sursei.

In Fig. 3.45, s-a prezentat prin linie întreruptă caracteristica tensiune curent corespunzătoare regimului de funcţionare al sursei ideale de tensiune (R = 0). De asemenea s-a indicat regimul de funcţionare - generator - al sursei de tensiune (I > 0) şi regimul de funcţionare - receptor - (I < 0).

3.11.5. Sursa reală de curent.

Ca şi în cazul sursei reale de tensiune, nu există o sursă ideală de curent în realitate. Sursa reală de curent posedă o rezistenţă internă diferită de ∞, circuitul fiind alcătuit în acest caz dintr-o sursă ideală de curent legată în paralel cu un rezistor a cărei rezistenţă electrică este egală cu rezistenţa internă a sursei (Fig. 3.46).

Ecuaţia circuitului electric corespunzător Fig. 3.46 este:

$$I = I_g - \frac{U}{R} \tag{3.45}$$

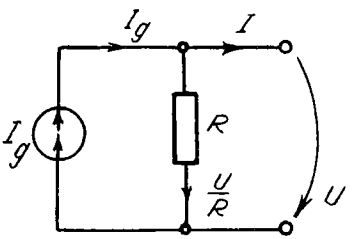


Fig. 3.46. Sursa reală de curent.

Caracteristica tensiune - curent este de asemenea o dreaptă (Fig. 3.47).

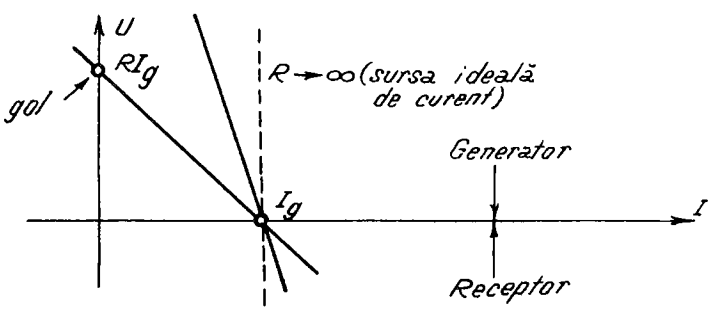


Fig. 3.47. Caracteristica tensiune-curent a sursei reale de curent.

Punctul de intersecţie al caracteristicii tensiune-curent cu axa tensiunii ($I=0$; $U=RIg$) reprezintă cazul în care sursa nu debitează curent în exterior (funcţionarea în gol).

La intersecţia caracteristicii tensiune-curent cu axa curentului $(I = I_g;\ U = 0)$ se obţine punctul care redă cazul în care sursa debitează

curentul maxim în exterior (funcţionare în scurtcircuit). S-a reprezentat în Fig. 3.47 prin linie întreruptă, caracteristica unei surse ideale de curent ($R \to \infty$).

De asemenea, s-a indicat regimul-generator-al sursei ($U > 0$) şi regimul-receptor - al sursei ($U < 0$).

3.11.6. Echivalenţa surselor electrice.

Două surse sînt echivalente, dacă prin substituirea uneia cu cealaltă, curentul şi tensiunea la borne nu se modifică.

Astfel o sursă reală cu caracteristică tensiune-curent liniară poate fi reprezentată fie printr-o sursă de tensiune, fie printr-o sursă de curent.

Dacă se consideră o sursă de tensiune avînd tensiunea electromotoare E şi rezistenţa internă R, aceasta se poate înlocui cu o sursă de curent avînd curentul Ig şi rezistenţa internă tot R numai cînd:

$$E = RI_g \,. \tag{3.46}$$

Pentru a demonstra această echivalenţă, redată schematic în Fig. 3.48, se scriu ecuaţiile caracteristicilor tensiune-curent.

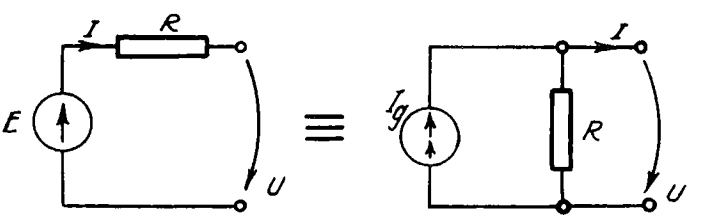


Fig. 3.48. Echivalenţa sursei de tensiune cu sursa de curent.

$U = E - RI$ şi $I = Ig - \frac{U}{R}$. Se observă că cele două relaţii sînt identice numai în cazul în care relaţia (3.46) este îndeplinită.

3.11.7. Legarea surselor electrice ideale

La legarea în serie a două surse ideale de tensiune, curentul se păstrează dar tensiunea la borne U este suma tensiunilor la bornele surselor:

$$U = E_1 + E_2 \tag{3.47}$$

Prin urmare: două surse ideale de tensiune legate în serie sînt echivalente cu o singură sursă ideală de tensiune avînd tensiunea electromotoare egală cu suma tensiunilor electromotoare (Fig. 3.49).

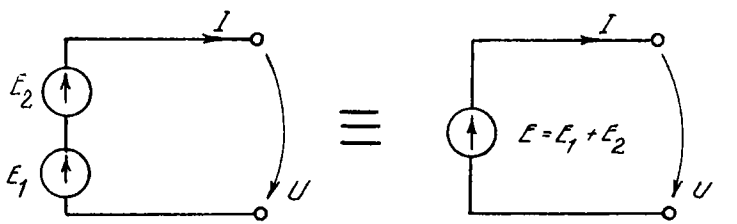


Fig. 3.49. Echivalenţa legării în serie a două surse ideale de tensiune.

Legarea în serie a două surse ideale de curent (Fig. 3.50) se realizează numai cînd au acelaşi curent generat.

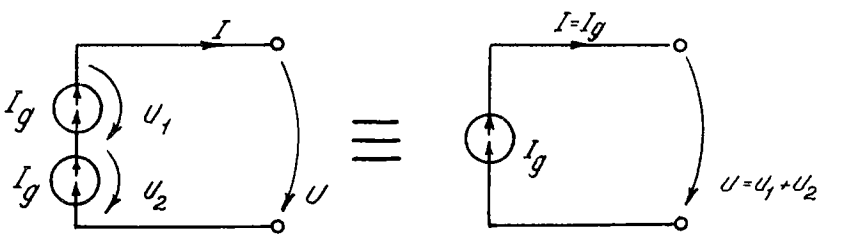


Fig. 3.50. Echivalenţa legării în serie a două surse ideale de curent.

Tensiunea U la borne este suma tensiunilor la bornele surselor de curent:

$$U = U_1 + U_2 \tag{3.48}$$

Legarea în paralel a două surse ideale de tensiune poate fi realizată dacă au aceeaşi tensiune electromotoare (Fig. 3.51).

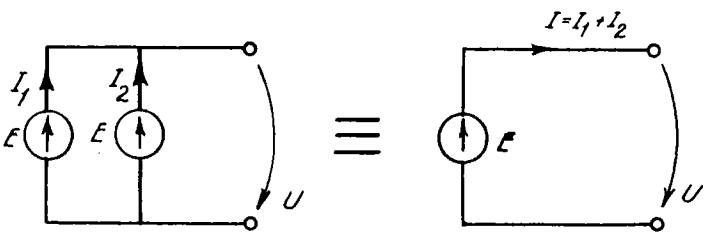


Fig. 3.51. Echivalenţa legării în paralel a două surse ideale de tensiune.

Tensiunea la borne este egală cu tensiunea electromotoare.

$$U = E. \tag{3.49}$$

Curentul I debitat în exterior pe la borne este suma curenţilor la bornele surselor de tensiune:

$$I = I_1 + I_2 . \tag{3.50}$$

Cînd se leagă în paralel două surse ideale de curent (Fig. 3.52) tensiunea la borne este aceeaşi; curentul I total este suma curenţilor generaţi de cele două surse.

Prin urmare: două surse ideale de curent legate în paralel sînt echivalente cu una singură pentru care curentul generat este suma curenţilor componenţi.

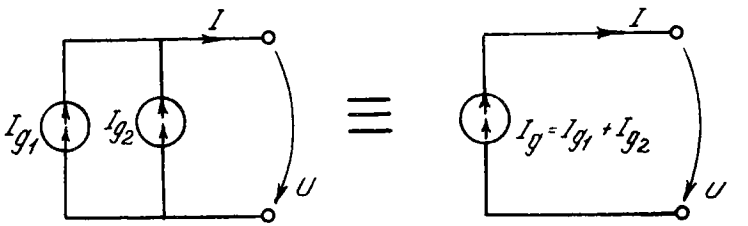


Fig. 3.52. Echivalenţa legării în paralel a două surse ideale de curent.

3.12. Elementele topologice ale circuitelor de curent continuu

Elementele ideale de circuit: sursele ideale şi rezistorul ideal sînt legate într-un circuit electric în cele mai diferite moduri. Această legare (interconectare) dă naştere unor noi elemente, denumite elemente topologice de circuit şi care se definesc după cum urmează:

Nod este punctul de ramificaţie al circuitului electric (Fig. 3.53). Sensul de referinţă va fi sensul de ieşire din nod. Numărul de noduri al unui circuit electric se notează cu N.

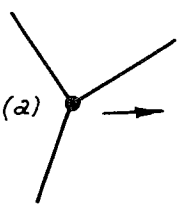


Fig. 3.53. Nod.

Latură este o cale de curent a circuitului electric cuprinsă între două noduri. (Fig. 3.54).

In latură pot exista şi elemente ideale de circuit; surse şi rezistoare.

Sensul de referinţă al laturii indicat pe schema electrică a circuitului este sensul curentului prin latură dacă aceasta conţine un rezistor, sensul tensiunii electromotoare dacă latura conţine numai generator ideal de tensiune şi sensul curentului de scurtcircuit dacă latura conţine numai generator ideal de curent. Numărul de laturi al unui circuit electric se notează cu L.

Fig. 3.54. Latură.

Ochi este o succesiune închisă de laturi dintr-un circuit (Fig. 3.55)

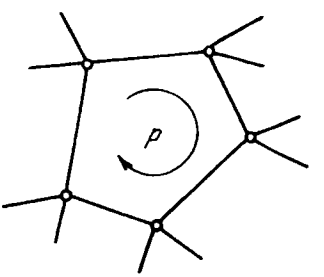


Fig. 3.55. Ochi.

Sensul de referinţă al ochiului este ales arbitrat şi indicat pe schema electrică a circuitului.

Sistem de ochiuri independente reprezintă un ansamblu de ochiuri care se determină în următorul mod: se alege un ochi oarecare ca prim ochi independent; se determină în continuare, pe rînd, cîte un ochi independent de cele formate deja, respectînd regula ca noul ochi să aibă cel puţin o latură care să nu aparţină vreunuia din ochiurile deja constituite; determinarea ochiurilor independente este terminată atunci cînd fiecare latură a circuitului face parte cel puţin dintr-un ochi independent.

Numărul de ochiuri independente al sistemului stabilit pentru un circuit electric se notează cu o.

Intre numărul de noduri N, numărul de laturi L şi numărul de ochiuri independente o, există o relaţie matematică:

$$o = L - N + 1 \tag{3.51}$$

cunoscută sub numele de teorema lui Euler.

3.13. Teoremele lui Kirchhoff pentru circuite de curent continuu

Intre mărimile electrice - tensiuni electromotoare, tensiuni electrice şi curenţi electrici - caracteristice ale unui circuit electric de curent continuu, există anumite relaţii matematice cunoscute sub denumirea de teoremele lui Kirchhoff.

3.13.1. Teorema întîi a lui Kirchhoff.

Este o consecinţă a legii conservării sarcinii electrice (3.13).

Enunţul este următorul: suma algebrică a intensităţilor curenţilor prin laturile legate într-un nod de circuit este egală cu zero.

$$\sum_{k \in a} I_k = 0 \tag{3.52}$$

Suma se referă la toţi curenţii din laturile legate la nod. Aceasta este precizată prin notaţia $k \in a$: se citeşte: pentru orice latură k aparţinînd nodului a. In relaţia respectivă, semnele termenilor se adoptă în conformitate cu regula precizată în Fig. 3.56 (convenţia poate fi inversată).

Se demonstrează că într-un circuit cu N noduri, se scriu numai N-1 ecuaţii cu teorema întîi a lui Kirchhoff. In acest scop se consideră circuitul electric din Fig. 3.57.

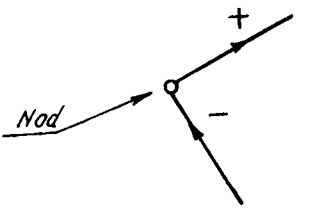


Fig. 3.56. Convenţia pentru semnele curenţilor.

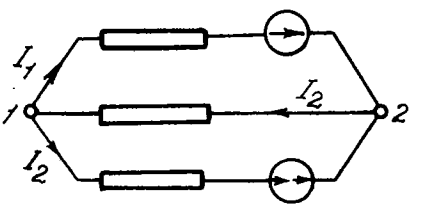


Fig. 3.57. Circuit cu două noduri.

Se aplică nodului 1 şi apoi nodului 2, teorema întîi a lui Kirchhoff;

nodul 1 : $I_1 - I_2 + I_3 = 0$;

nodul 2 : $-I_1 + I_2 - I_3 = 0$;

aceeaşi ecuaţie pentru nodul 2 ca şi pentru nodul 1. Intr-un circuit cu N = 2 noduri, teorema întîi a lui Kirchhoff determină 2 - 1 = 1 ecuaţie distinctă. Dacă se extinde la reţele cu mai multe noduri acest raţionament, se obţine că pentru un circuit electric cu N noduri se pot scrie numai N-1 ecuaţii distincte, adică:

$$\sum_{k \in a} I_k = 0, \text{ în care a} = 1,2 \ldots\ldots N-1$$

3.13.2. Teorema a doua a lui Kirchhoff

Pentru un ochi de circuit se demonstrează că:

$$\sum_{k \in p} R_k I_k + \sum_{k \in p} U_k = \sum_{k \in p} E_k \qquad (3.53)$$

adică: suma algebrică a căderilor de tensiune pe elementele din laturile unui ochi de circuit este egală cu suma algebrică a tensiunilor electromotoare din laturile ochiului considerat.

Notarea $k \in p$ se citeşte: „pentru toate laturile k aparţinînd ochiului p".

In expresia matematică a teoremei a doua a lui Kirchhoff, termenii care apar au semnificaţia următoare:

$R_k I_k$ reprezintă tensiunea la bornele rezistorului **R** din latura k sau căderea de tensiune pe acest rezistor ;

U_k reprezintă tensiunea la bornele generatorului de curent din latura k;

F_k reprezintă **tensiunea** electromotoare a sursei ideale de tensiune din latura k.

Semnele termenilor se adoptă în raport cu sensul de referinţă al ochiului (Fig. 3.58).

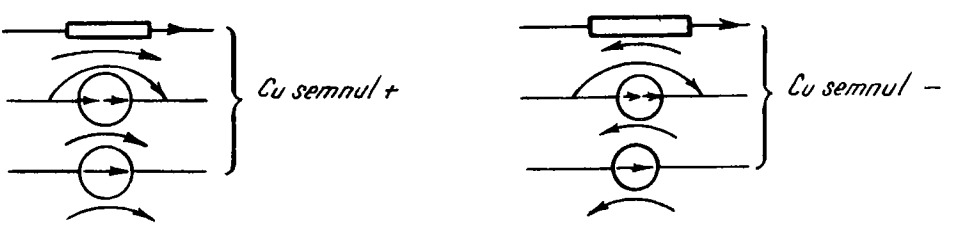


Fig. 3.58. Semnele termenilor adoptate.

Căderile de tensiune din membrul întîi se scriu cu semnul plus, cînd curenţii care le generează au acelaşi sens cu sensul de referinţă al ochiului şi cu semnul minus în caz contrar.

Tensiunile la bornele generatoarelor ideale de curent se scriu cu semnul plus cînd sensul lor au acelaşi sens cu sensul de referinţă al ochiului şi cu semnul minus în caz contrar.

In fine, tensiunile electromotoare ale surselor ideale de tensiune se scriu cu semnul plus cînd sensul lor au acelaşi sens cu sensul de referinţă al ochiului şi cu semnul minus în caz contrar.

Exemplu. Pentru circuitul electric din Fig. 3.59 se vor scrie ecuaţiile corespunzătoare teoremelor Kirchhoff.

Circuitul are L = 6 laturi şi N = 3 noduri. Rezultă 0 = L - N + 1 = = 6 - 3 + 1 = 4 ochiuri independente.

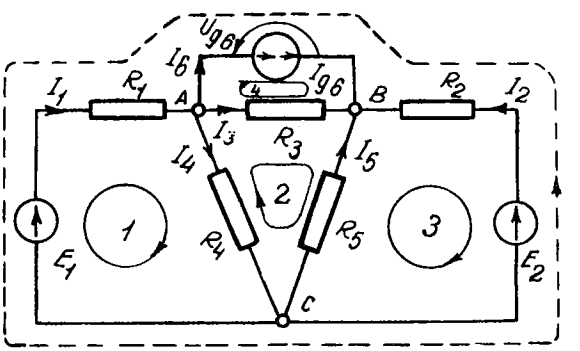


Fig. 3.59. Circuit electric cu N = 3 şi L = 6.

Ecuaţiile obţinute prin aplicarea celor două teoreme ale lui Kirchhoff sînt:

$$\text{N - 1 = 3 - 1 = 2 ecuaţii} \quad \begin{cases} -I_1 + I_3 + I_4 + I_{g6} = 0 & \text{nodul A} \\ -I_2 - I_3 - I_5 - I_{g6} = 0 & \text{nodul B} \end{cases} \qquad (3.54)$$

$$o = 4 \text{ ecuaţii} \begin{cases} R_1 I_1 + R_4 I_4 = E_1 & \text{ochiul 1} \\ R_3 I_3 - R_4 I_4 - R_5 I_5 = 0 & \text{ochiul 2} \\ - R_2 I_2 + R_5 I_5 = - E_2 & \text{ochiul 3} \\ - R_3 I_3 - U_{g6} = 0 & \text{ochiul 4} \end{cases} \qquad (3.55)$$

Să explicăm mai în detaliu modul de aplicare a teoremelor Kirchhoff. In nodul A, s-a înlocuit $I_6 = I_{g6}$ în care I_{g6} este curentul debitat de sursa ideală de curent. Curentul I_1 s-a scris cu minus pentru că intră în nod, ceilalţi curenţi I_3, I_4 şi I_{g6} s-au scris cu plus pentru că ies din nod.

In nodul B, toţi curenţii I_2, I_3, I_5 şi I_{g6} intră în nod şi s-au scris cu minus. Pentru nodul C nu s-a mai scris teorema întîi a lui Kirchhoff pentru că într-un circuit se scriu N-1 ecuaţii. Se putea scrie în locul ecuaţiei pentru nodul A sau în locul ecuaţiei pentru nodul B.

Teorema a doua a lui Kirchhoff s-a scris pentru ochiul independent 1 astfel: la prima parcurgere a ochiului se constată că tensiunea $R_1 I_1$ are semnul plus fiindcă sensul curentul I_1 coincide cu sensul de referinţă al ochiului. Din acelaşi motiv s-a scris cu semnul plus şi căderea de tensiune $R_4 I_4$. La a doua parcurgere a ochiului 1, pentru a scrie membrul doi al ecuaţiei, tensiunea electromotoare va fi scrisă cu semnul plus pentru că sensul acesteia este la fel cu sensul de referinţă al ochiului. Se procedează asemănător pentru ochiul 2 şi 3, observînd că termenii $R_4 I_4$, $R_5 I_5$ din ecuaţia scrisă pentru ochiul 2 şi $R_2 I_2$ pentru ochiul 3 s-au scris cu semnul minus pentru că curenţii I_4, I_5 şi I_2 care provoacă căderile de tensiune respective au sensuri contrare cu sensurile de referinţă ale ochiurilor.

In ultima ecuaţie scrisă pentru ochiul 4, apare termenul U_{g6} care reprezintă tensiunea la bornele generatorului ideal de curent I_{g6} din latura 6. Această tensiune s-a scris cu semnul minus pentru că este contrar cu sensul de referinţă al ochiului 4. Termenul doi al ecuaţiei este zero deoarece în laturile care aparţin ochiului 4, lipsesc sursele de tensiune electromotoare.

Se putea scrie teorema a doua a lui Kirchhoff pentru ochiul figurat cu linie întreruptă în locul oricărei ecuaţii scrise cu teorema a doua a lui

Kirchhoff, astfel că numărul de ecuaţii scrise cu teorema a doua a lui Kirchhoff să rămînă egal cu o.

Această ecuaţie se scrie astfel:

$$- R_1 I_1 + R_2 I_2 + U_{g6} = - E_1 + E_2 \qquad (3.56)$$

Pentru ca sistemul de ecuaţii să fie complet determinat este necesar şi suficient ca numărul de ecuaţii să fie egal cu numărul de necunoscute.

In exemplul nostru, numărul de ecuaţii este egal cu 6 şi numărul de necunoscute este egal cu numărul de laturi L, adică L = 6, cu precizarea că în latura 6, necunoscută nu mai este curentul ca în celelalte laturi; este tensiunea la bornele generatorului de curent I_{g6}.

Prin urmare, pentru determinarea necunoscutelor se scriu N-1 ecuaţii cu teorema întîi a lui Kirchhoff şi o ecuaţii cu teorema a doua a lui Kirchhoff; rezultă un sistem de ecuaţii algebrice liniare cu :

$$N - 1 + o = N - 1 + L - N + 1 = L$$

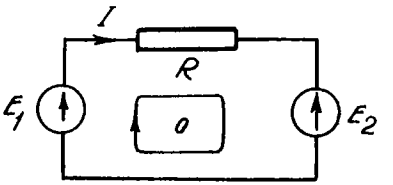
ecuaţii cu L necunoscute.

Sistemul este complet determinat dacă nu există ochi format numai din generatoare ideale de tensiune şi nod în care concură numai generatoare ideale de curent.

3.14. Puteri în circuite de curent continuu

Dacă într-un circuit de curent continuu se efectuează bilanţul puterilor, se constată conservarea acestora, adică puterile debitate de surse sînt disipate în rezistoare sau acumulate în alte surse ale circuitului electric sub o altă formă de energie.

Să efectuăm bilanţul de puteri pentru circuitul din Fig. 3.60 în care s-a considerat că sursele E_1 şi E_2 sînt ideale (rezistenţe interne neglijabile) şi rezistorul de rezistenţă electrică R s-a plasat în circuit pentru limitarea curentului. Acest circuit electric reprezintă un montaj de încărcarea unui acumulator de la un redresor.



— Fig. 3.60. Ochi cu două surse.

Ecuaţia scrisă cu teorema a doua a lui Kirchhoff este:

$$RI = E_1 - E_2 \tag{3.57}$$

Se înmulţeşte cu I în ambi membri şi rezultă prin regruparea termenilor

$$E_1 I = E_2 I + RI^2 \tag{3.58}$$

care se interpretează astfel:

Puterea $E_1 I$ debitată de sursa E_1 este egală cu puterea disipată în rezistorul R (care se încălzeşte) şi puterea primită de sursa E_2 (acumulatorul se încarcă).

Bilanţul puterilor dintr-un circuit de curent continuu este dat de teorema conservării puterilor în circuite de curent continuu prin ecuaţia următoare:

$$\sum_{k=1}^{L} R_k I_k^2 = \sum_{k=1}^{L} \left(E_k I_k + U_{gk} I_{gk} \right) \tag{3.59}$$

Enunţul este următorul:

Suma puterilor consumate de toate rezistoarele circuitului este egală cu suma puterilor generate de toate generatoarele ideale de tensiune şi de curent ale circuitului electric.

Termenii din membrul stîng sînt totdeauna pozitivi; termenii din membrul drept se scriu cu semnul plus sau minus conform regulilor prezentate în Fig. 3.61 .

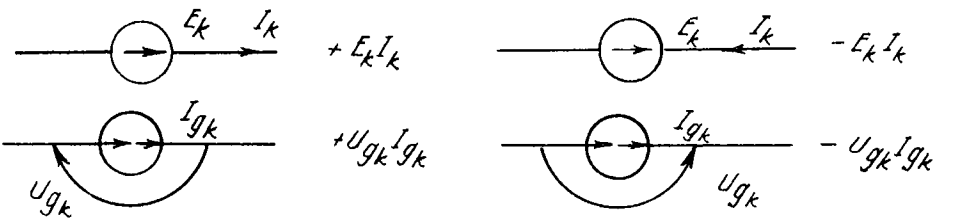


Fig. 3.61. Reguli de scriere a puterilor debitate sau primite de surse.

3.15. Teorema transferului maxim de putere

Un generator real de tensiune electromotoare E şi rezistenţă internă R_i sau un generator real de curent I_g şi rezistenţă internă R_i transferă o putere maximă receptorului de rezistenţa R_s atunci cînd rezistenţa acestuia este egală cu rezistenţa internă a generatorului:

$$R_s = R_i \tag{3.60}$$

Puterea maximă transferată are expresia

$$P_{max} = \frac{E^2}{4 R_i} \tag{3.61}$$

în cazul generatorului real de tensiune şi

$$P_{max.} = \frac{R_i I_g^2}{4} \tag{3.62}$$

în cazul generatorului real de curent,

Considerăm un generator real de tensiune electromotoare E şi rezistenţă internă R_i care alimentează un rezistor avînd rezistenţa R_s reglabilă (Fig. 3.62).

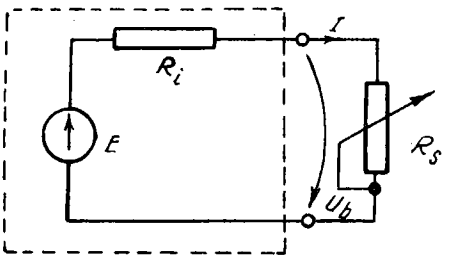


Fig. 3.62. Generator de tensiune E alimentează rezistenţa reglabilă R_s.

Pentru a studia transferul de putere din circuit se calculează mai întîi curentul I din circuit:

$$I = \frac{E}{R_i + R_s} \cdot \tag{3.63}$$

Puterea disipată în rezistorul de sarcină va fi:

$$P = R_s I^2 = \frac{R_s E^2}{(R_i + R_s)^2} = \frac{E^2}{R_i\left(2 + \frac{R_s}{R_i} + \frac{R_i}{R_s}\right)} \tag{3.64}$$

Se observă că în cazurile în care rezistorul de sarcină R_s este scurt-circuitat ($R_s = 0$) sau întrerupt ($R_s \to \infty$), puterea P este zero (P = 0).

Puterea P va fi maximă, atunci cînd numitorul expresiei de mai sus va fi minim. Acesta este minim atunci cînd $R_s = R_i$, caz în care puterea transformată P devine maximă adică:

$$P_{max} = \frac{E^2}{4 R_i}$$

Analog se determină puterea transferată maximă şi în cazul în care generatorul este de curent (Fig. 3.63).

Se obţine:

$$P_{max.} = \frac{R_i I_g^2}{4}$$

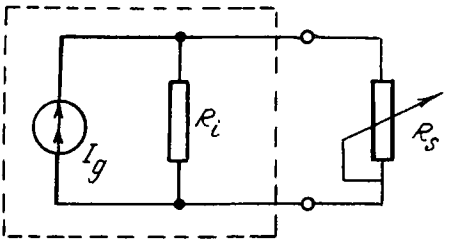


Fig. 3.63. Generator de curent I_g alimentează rezistenţa reglabilă R_s.

Reprezentată grafic variaţia puterii P transferată de generator şi disipată se prezintă conform Fig. 3.64.

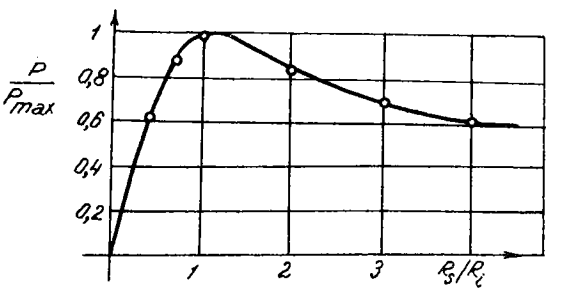


Fig. 3.64. Variaţia puterii transferată de generator.

In grafic s-au utilizat pentru ordonată şi abscisă mărimi relative. Pe axa absciselor s-a reprezentat raportul dintre rezistenţa de sarcină şi rezistenţa internă a generatorului $\frac{R_s}{R_i}$ iar pe axa ordonatelor s-a reprezentat raportul dintre puterea disipată în rezistenţa de sarcină şi valoarea sa maximă

$$\frac{P}{P_{max}} = \frac{4}{2 + \frac{R_s}{R_i} + \frac{R_i}{R_s}} \cdot \qquad (3.65)$$

Dacă se calculează randamentul transferului de putere de la sursă la receptor ca raport între puterea disipată în sarcină şi puterea generată de sursă, în procente, se obţine:

$$\eta = 100 \frac{P}{P_g} = 100 \frac{R_s I^2}{E I} = 100 \frac{R_s}{R_i + R_s} \quad (\%) \tag{3.66}$$

Cînd transferul de putere este maxim, randamentul este mic, egal cu 50%.

$$R_i = R_s \Longrightarrow P = P_{max} \text{ şi } \eta = 100 \frac{R_i}{R_i + R_i} = 50\%$$

Puterea maximă se obţine numai la un randament redus. Se obţine randament ridicat, atunci cînd rezistenţa internă este mică comparativ cu rezistenţa de sarcină ($R_i \ll R_s$).

In acest caz:

$$\eta \simeq 100 \left(1 - \frac{R_i}{R_s} \right). \tag{3.67}$$

Dacă $R_i = 0$ (generator ideal), randamentul este maxim (100%).

Pentru a obţine randamentul $\eta = 95\%$ (caz real) este necesar ca $R_s > 20\, R_i$.

3.16. Metode de rezolvare a circuitelor liniare de curent continuu

Rezolvarea circuitelor liniare de curent continuu presupune determinarea unor mărimi electrice necunoscute avînd însă o parte din mărimile caracteristice ale circuitului date.

Cele mai răspîndite probleme care se cer rezolvate sînt acelea în care trebuie:

- Să se determine curenţii cînd sînt date rezistenţele rezistoarelor, rezistenţele interne ale surselor şi tensiunilor electromotoare ale surselor.

Sau:

- Să se determine curenţii din laturi şi tensiunile la bornele surselor de curent cînd sînt cunoscute rezistenţele rezistoarelor, rezistenţele interne ale surselor de tensiune şi surselor de curent, tensiunile electromotoare ale surselor de tensiune şi curenţii debitaţi de sursele de curent.

Se mai întîlnesc şi următoarele probleme:

- Să se determine tensiunile electromotoare ale surselor de tensiune şi curenţii surselor de curent cînd sînt cunoscute rezistenţele rezistoarelor, rezistenţele interne ale surselor şi curenţii din laturi şi tensiunile surselor de curent.

- Probleme combinate.

Cînd sursele de tensiune şi curent ale circuitului electric de curent continuu sînt ideale, rezistenţele lor interne sînt cunoscute, egale cu zero respectiv infinit şi nu mai sînt precizate în enunţul problemei.

Calea de rezolvare a circuitului electric liniar se parcurge conform unor metode de rezolvare, cele mai multe din acestea avînd la bază ecuaţiile scrise cu ajutorul teoremelor Kirchhoff.

Aceste metode sînt:

- Metoda teoremelor Kirchhoff.
- Metoda superpoziţiei.
- Metoda curenţilor ciclici.
- Metoda tensiunilor la noduri.

Pentru cazurile în care se cere determinarea unui singur curent printr-o latură pasivă a unui circuit electric izolat sau curentul debitat în exterior de un circuit electric de curent continuu dipolar se aplică:

- Metoda generatoarelor echivalente de tensiune şi curent.

Pentru simplificarea circuitului electric de curent continuu, s-au imaginat de asemenea metode care determină un alt circuit electric, echivalent însă celui iniţial. Ultimul circuit electric obţinut capătă însuşirea de a fi rezolvat cu una din metodele enumerate dar prin aplicarea unui număr redus de ecuaţii faţă de circuitul electric iniţial.

Metodele de simplificare sînt:

- Metoda rezistenţelor echivalente.
- Metoda transfigurării din triunghi în stea şi reciproc.
- Metoda teoremei lui Vachy.

Pentru verificarea rezultatelor obţinute în urma rezolvării circuitului electric de curent continuu, se efectuează bilanţul puterilor prezentat anterior la paragraful 3.14.

3.16.1. Metoda teoremelor lui Kirchhoff.

După cum s-a prezentat anterior, prin teorema întîi şi a doua a lui Kirchhoff, se stabilesc relaţii de funcţionare ale circuitelor electrice de curent continuu, datele care apar în aceste relaţii fiind mărimi electrice, caracteristici ale circuitelor respective.

Pentru utilizarea corectă a metodei, se procedează astfel:

a) Se stabilesc numărul de noduri, numărul de laturi şi numărul de ochiuri fundamentale.

Curenţii şi tensiunile necunoscute se notează cu majuscule şi indici corespunzători laturilor aferente.

b) Se atribuie curenţilor din laturi şi tensiunilor de la bornele surselor de curent, pe schema circuitului electric, sensuri arbitrare.

Se presupun cunoscute tensiunile electromotoare ale surselor de tensiune şi curenţii surselor de curent. Dacă în urma rezolvării ecuaţiilor, curenţii sau tensiunile apar cu semne negative, sensul real al curenţilor este opus sensului de referinţă atribuit. Se notează nodurile pe schema electrică.

c) Se stabilesc ochiurile independente şi se atribuie sensuri de referinţă arbitrare acestor ochiuri pe aceeaşi schemă electrică. Se notează tot pe schema electrică, ochiurile independente.

d) Se scriu pentru noduri N-1 ecuaţii cu teorema întîi a lui Kirchhoff şi pentru ochiurile independente $0 = L - N + 1$ ecuaţii cu teorema a doua a lui Kirchhoff.

La aplicarea teoremei a doua a lui Kirchhoff, trebuie să se parcurgă tot ochiul independent în acelaşi sens de referinţă arbitrar ales. Căderile de tensiune $R_k I_k$ se scriu cu plus în relaţia (3.53) dacă sînt parcurse în sensul lor şi cu semnul minus, în caz invers. Tensiunile de la bornele surselor de curent (generatoarelor de curent) se scriu cu plus dacă sensul coincide cu

sensul de referinţă al ochiului independent şi cu semnul minus dacă sensul nu coincide. Tensiunile electromotoare se scriu cu plus dacă sensul lor coincide cu sensul de referinţă al ochiului independent şi cu minus în caz contrar.

e) Pe schema electrică simplificată (fără elemente dipolare de circuit) se trasează curenţii şi tensiunile electrice presupuse iniţial necunoscute astfel: dacă sensul curentului sau tensiunii se obţine în urma rezolvării sistemului de ecuaţii cu semnul plus, atunci sensul arbitrar ales iniţial este real şi sensul se păstrează. Dacă semnul este negativ, sensul arbitrar ales nu este cel real şi în schema electrică simplificată se trasează invers sensului arbitrar ales iniţial.

f) Se verifică aplicarea corectă a teoremelor lui Kirchhoff şi a calculului numeric efectuat, cu bilanţul puterilor prezentat în paragraful 3.14.

Aplicaţia 1. Să se rezolve circuitul din Fig. 3.65.

Se vor verifica rezultatele cu bilanţul puterilor.

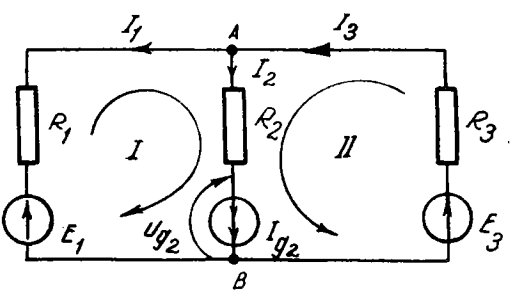


Fig. 3.65. Circuit electric cu N = 2 şi L = 3.

Date:

- Tensiunile electromotoare.

$$E_1 = 15\ V\ ; \qquad E_3 = 20\ V\ .$$

- Curenţii generatoarelor de curent.

$$Ig_2 = 3 \quad A \ .$$

- Rezistenţele rezistoarelor electrice.

$$R_1 = 3\,\Omega \quad ; \quad R_2 = 5\,\Omega \quad ; \quad R_3 = 4\,\Omega \ .$$

Necunoscute:

- Curenţii din laturi : I_1 ; I_3 .

- Tensiunea la bornele generatorului de curent : Ug_2.

Mod de rezolvare.

Circuitul electric are N = 2; L = 3; o = L - N + 1 = 3 - 2 + 1 = 2

a) Se notează, cu majuscule şi indici corespunzători laturilor aferente, necunoscutele: I_1, I_3 şi Ug_2.

b) In schema electrică, se atribuie sensuri de referinţă arbitrare curenţilor din laturi şi tensiunilor la bornele generatoarelor de curent. Se notează nodurile cu A şi B.

c) In schema electrică, se atribuie sensuri arbitrare ochiurilor independente şi se notează cu I şi II.

d) Se scriu pentru noduri N - 1 = 2 - 1 = 1 ecuaţii cu teorema întîi a lui Kirchhoff,

$$\sum_{k \in a} I_k = 0$$

adică:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \text{ pentru nodul A}$$

Se scriu pentru ochiuri independente:

o = L - N + 1 = 3 - 2 + 1 = 2 ecuaţii cu teorema a doua a lui Kirchhoff.

$$\sum_{k \in p} R_k I_k + \sum_{k \in p} U_k = \sum_{k \in p} E_k$$

adică:

$$\begin{aligned} - R_1 I_1 + R_2 I_2 - Ug_2 &= E_1 \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 - Ug_2 &= E_3 \end{aligned} \qquad (3.68)$$

Se înlocuiesc datele cu valori numerice în ecuaţiile respective avînd în vedere şi înlocuirea $I_2 = Ig_2 = 3$ A.

Se obţine următorul sistem de ecuaţii:

$$I_1 + 3 - I_3 = 0$$

$$- 3 I_1 + 5.3 - Ug_2 = 15$$

$$5.3 + 4 I_3 - Ug_2 = 20$$

Se înmulţeşte ecuaţia 2^a cu - 1 şi se adună cu ecuaţia 3^a. Se obţine:

$$3 I_1 + 4 I_3 = 5 .$$

Se înlocuieşte $I_3 = I_1 + 3$ din ecuaţia 1^a şi se obţine:

$$3 I_1 + 4 (I_1 + 3) = 5$$

sau

$$7 I_1 = - 7. \text{Rezultă } I_1 = - 1 \text{ A} .$$

Din ecuaţia 1^a rezultă $I_3 = I_1 + 3 = - 1 + 3 = 2$ A .

Tensiunea la bornele generatorului de curent Ug_2 rezultă din ecuaţia 2^a:

$$Ug_2 = - 3 (-1) + 15 - 15 = 3 \text{ V} .$$

e) Pe schema electrică simplificată din Fig. 3.66 se trasează curenţii şi tensiunile presupuse iniţial necunoscute. Curentul I_1 are sens contrar celui iniţial acceptat.

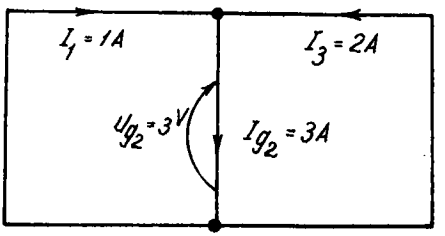


Fig. 3.66. Curenţii obţinuţi prin rezolvarea circuitului electric (Fig. 3.65).

f) Verificarea aplicării corecte a teoremelor lui Kirchhoff şi a calculului numeric efectuat se face cu bilanţul puterilor.

$$\sum_{k=1}^{L} R_k I_k^2 = \sum_{k=1}^{L} (E_k I_k + Ug_k Ig_k) \qquad (3.69)$$

$$R_1 I_1^2 + R_2 I_{g_2}^2 + R_3 I_3^2 = E_1 I_1 + E_3 I_3 + Ug_2 Ig_2$$

Termenii din membrul doi s-au luat cu plus conform regulilor prezentate în paragraful 3.14; Fig. 3.61.

Se înlocuieşte şi se obţine:

$$3.\ 1^2 + 5.3^2 + 4.2^2 = 15\ .\ 1 + 20.\ 2 + 3.3$$

$$64\ W \quad = \quad 64\ W$$

Rezultă că aplicarea teoremelor lui Kirchhoff şi efectuarea calculului numeric sînt corecte.

Aplicaţia 2 .

Să se rezolve circuitul electric din Fig. 3.67.

Se vor verifica rezultatele cu bilanţul puterilor.

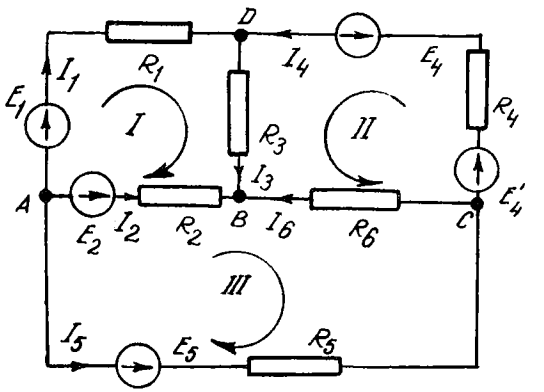


Fig. 3.67. Circuit electric cu N = 4 şi L = 6.

Date:

- Tensiunile electromotoare:

$E_1 = 300\,V; E_2 = 100\,V;\ E_4 = 120\,V; E'_4 = 50\,V; E_5 = 200\,V$

- Rezistenţele rezistoarelor electrice:

$R_1 = 10\,\Omega\ ;\ R_2 = 10\,\Omega\ ;\ R_3 = 5\,\Omega\ ;\ R_4 = 5\,\Omega\ ;\ R_5 = 20\,\Omega\ ;$

$$R_6 = 15\,\Omega .$$

Necunoscute:

- Curenţii din laturi :

$$I_1;\ I_2;\ I_3\ ;\ I_4;\ I_5\ ;\ I_6\ .$$

Rezolvare:

Circuitul electric are N = 4 noduri, L = 6 laturi şi

o = L - N + 1 = 6 - 4 + 1 = 3 ochiuri independente.

Se atribuie sensuri de referinţă arbitrare pentru curenţii din laturi şi pentru ochiurile independente.

Se scriu N - 1 = 4 - 1 = 3 ecuaţii cu teorema întîi a lui Kirchhoff, pentru nodurile A, C şi D.

$$I_1 + I_2 + I_5 = 0 \tag{3.70}$$

$$I_4 - I_5 + I_6 = 0$$

$$-I_1 + I_3 - I_4 = 0$$

Se scriu 0 = 3 ecuaţii cu teorema a doua a lui Kirchhoff pentru ochiurile independente I, II şi III.

$$\begin{aligned} R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 &= E_1 - E_2 \\ R_3 I_3 + R_4 I_4 - R_6 I_6 &= -E_4 + E_4' \\ R_2 I_2 - R_5 I_5 - R_6 I_6 &= E_2 - E_5 \end{aligned} \tag{3.71}$$

Se înlocuiesc datele cu valori numerice în ecuaţiile respective: obţinem următorul sistem de ecuaţii:

$$I_1 + I_2 + I_5 = 0$$

$$I_4 - I_5 + I_6 = 0$$

$$-I_1 + I_3 - I_4 = 0$$

$$10 I_1 - 10 I_2 + 5 I_3 = 300 - 100$$

$$5 I_3 + 5 I_4 - 15 I_6 = -120 + 50$$

$$10 I_2 - 10 I_5 - 15 I_6 = 100 - 200$$

Rezolvînd sistemul de ecuaţii se obţin următoarele soluţii:

$$I_1 = 10\ A\ ;\ I_2 = -\ 8\ A;\ I_3 = 4\ A$$

$$I_4 = -\ 6\ A\ ;\ I_5 = -\ 2\ A\ ;\ I_6 = 4\ A$$

Rezultă că I_1, I_3 şi I_6 circulă în sensurile indicate pe Fig. 3.67; curenţii I_2, I_4 şi I_5 circulă în sens contrar .

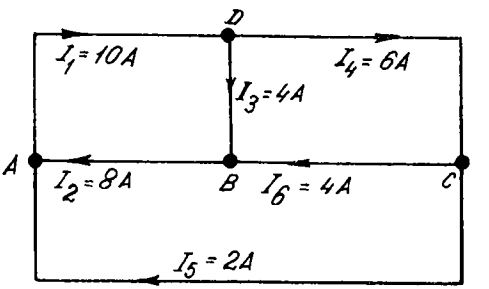


Fig. 3.68. Curenţii obţinuţi prin rezolvarea circuitului electric (Fig. 3.67).

Pe schema electrică simplificată din Fig. 3.68, se trasează curenţii cu sensurile lor efective.

Se aplică bilanţul puterilor.

$$R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2 = E_1 I_1 - E_2 I_2 + E_4 I_4 - E_4' I_4 - E_5 I_5. \qquad (3.72)$$

$$10.10^2 + 10.8^2 + 5.4^2 + 5.6^2 + 20.2^2 + 15.\ 4^2 =$$

$$300\ .\ 10 - 100\ .\ 8 + 120\ .\ 6 - 50\ .\ 6 - 200\ .\ 2$$

$$2\ 200\ W \quad = \quad 2\ 200\ W.$$

3.16.2. Metoda superpoziţiei

Se demonstrează că intensitatea curentului într-o latură dată a unui circuit electric este egală cu suma algebrică a curenţilor din latura respectivă, aceşti curenţi fiind rezultaţi din calculul succesiv al circuitului electric avînd în funcţiune numai o sursă de tensiune electrică, celelalte fiind pasivizate.

Se înţelege prin pasivizarea sursei, păstrarea în circuit numai a rezistenţei sale interne.

Deci. în circuitele electrice intermediare, se păstrează eventualele rezistenţe interne ale surselor.

Metoda este avantajoasă că se rezolvă circuite electrice cu o singură sursă, calculul fiind în acest caz mai simplu. Dezavantajul apare la circuitele electrice cu mai multe surse cînd trebuie rezolvate atîtea circuite electrice intermediare cîte surse sînt în circuit.

Aplicaţie.

Să se rezolve circuitul electric din Fig. 3.69. prin metoda superpoziţiei.

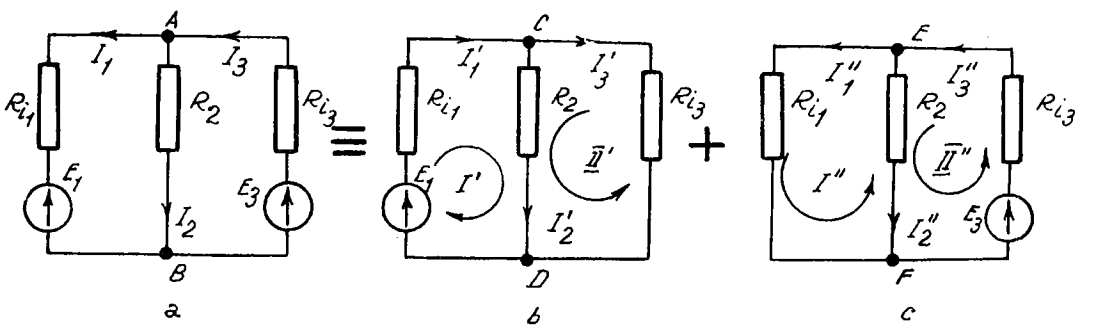


Fig. 3.69. Circuit electric pentru metoda superpoziţiei.

Date:

- Tensiuni electromotoare $E_1 = 22$ V ; $E_3 = 26$ V
- Rezistenţe interne $R_{i1} = 1\Omega$; $R_{i3} = 2\ \Omega$.
- Rezistenţele rezistoarelor electrice $R_2 = 4\ \Omega$.

Rezolvare:

Se descompune circuitul electric inițial într-o sumă de două circuite care au o singură sursă de tensiune electromotoare. Pentru fiecare din aceste două circuite se cunosc sensurile reale ale curenților stabiliți de sursa respectivă.

Circuitul electric din Fig. 3.69 b

Se aplică metoda teoremelor lui Kirchhoff:

$$\begin{aligned} I_1' &= I_2' + I_3' \\ R_{i1}\, I_1' + R_2\, I_2' &= E_1 \\ R_2\, I_2' - R_{i3}\, I_3' &= 0 \end{aligned} \qquad (3.73)$$

Se înlocuiesc datele cu valori numerice și rezultă sistemul:

$$\begin{aligned} I_1' &= I_2' + I_3' \\ 1\ I_1' + 4\ I_2' &= 22 \\ 4\ I_2' - 2\ I_3' &= 0 \end{aligned}$$

Rezolvînd sistemul de ecuații se obțin următoarele soluții:

$$I_1' = \frac{66}{7}\ A;\quad I_2' = \frac{22}{7}\ A;\quad I_3 = \frac{44}{7}\ A\ .$$

Circuitul electric din Fig. 3.69.c.

Se aplică metoda teoremelor lui Kirchhoff:

$$\begin{aligned} I_3'' &= I_1'' + I_2'' \\ 2\ I_3'' + 4\ I_2'' &= 26 \\ 1\ I_1'' - 4\ I_2'' &= 0 \end{aligned}$$

Rezolvînd şi acest sistem de ecuaţii se obţin soluţiile:

$$I''_1 = \frac{10\ 4}{14}\ A;\quad I''_2 = \frac{26}{14}\ A;\quad I''_3 = \frac{13\ 0}{14}\ A$$

Curenţii prin laturile circuitului electric din Fig. 3.69 a se obţin însumînd algebric curenţii prin laturile corespunzătoare din circuitele electrice b şi c din Fig. 3.69.

Dacă sensurile curenţilor coincid cu sensul curentului arbitrar ales în circuitul electric dat, se adoptă semnul plus. In caz contrar se scrie cu semnul minus.

$$I_1 = -I'_1 + I''_1 = -\frac{66}{7} + \frac{104}{14} = -2\ A$$

$$I_2 = I'_2 + I''_2 = \frac{22}{7} + \frac{26}{14} = 5\ A$$

$$I_3 = -I'_3 + I''_3 = -\frac{44}{7} + \frac{130}{14} = 3\ A$$

Rezultă că sensul curentului I_1 adoptat este invers sensului real.

In Fig. 3.70 se trasează pe schema simplificată curenţii cu sensurile lor efective.

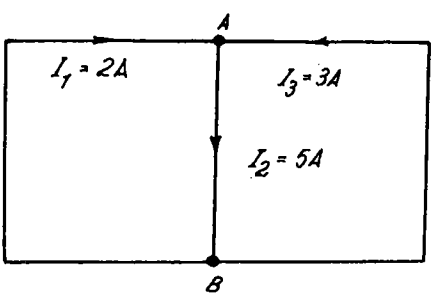


Fig. 3.70. Curenţii obţinuţi prin rezolvarea circuitului electric (Fig. 3.69).

Verificarea se face cu bilanţul puterilor:

$$R_{i1} I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_{13} I_3^2 = E_1 I_1 + E_3 I_3$$

$$1.2^2 + 4.5^2 + 2 \cdot 3^2 = 22.2 + 26.3$$

$$122 \text{ W} = 122 \text{ W}$$

3.16.3. Metoda curenţilor ciclici

Metoda se foloseşte pentru că simplifică rezolvarea. Dacă la calcularea unui circuit electric cu teoremele lui Kirchhoff trebuia rezolvat un sistem cu L ecuaţii şi tot atîtea necunoscute, prin aplicarea acestei metode, sistemul conţine un număr mai mic de ecuaţii, egal cu o numărul ochiurilor independente.(o < L).

Pentru o prezentare mai simplă şi o înţelegere a acestei metode se foloseşte exemplul următor:

Se consideră circuitul electric din Fig. 3.71.

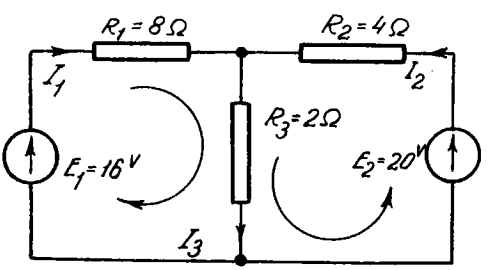


Fig. 3.71. Circuit electric pentru metoda curenţilor cicluri.

Aplicînd teoremele lui Kirchhoff se obţine sistemul de ecuaţii:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= I_3 \\ 8\ I_1 + 2\ I_3 &= 16 \\ 4\ I_2 + 2\ I_3 &= 20 \end{aligned}$$

Pentru rezolvarea sistemului de ecuaţii se va elimina curentul I_3. Se obţine noul sistem:

$$8 I_1 + 2 (I_1 + I_2) = 16$$

$$4 I_2 + 2 (I_1 + I_2) = 20$$

sau

$$(8 + 2) I_1 + 2 I_2 = 16$$

$$2 I_1 + (4 + 2) I_2 = 20$$

Cu soluţiile $I_1 = 1$ A şi $I_2 = 3$ A respectiv $I_3 = 4$ A .

Sistemul de două ecuaţii obţinut mai sus se poate obţine direct dacă se aleg noi necunoscute astfel ca teorema întîi a lui Kirchhoff să fie satisfăcută. Aceste necunoscute sînt tot curenţi dar nu sînt reali, sînt curenţi folosiţi în calcule. Se numesc curenţi ciclici sau de ochiuri.

Aceşti curenţi ciclici trebuie să îndeplinească anumite condiţii:

- Să fie asociaţi ochiurilor independente ale unui circuit electric şi să parcurgă toate laturile care alcătuiesc ochiul independent.

- Suma algebrică a curenţilor ciclici dintr-o latură a circuitului electric reprezintă curentul real din latura respectivă.

- Numărul curenţilor ciclici dintr-un circuit electric este egal cu numărul ochiurilor independente.

Prin urmare, avantajul acestei metode constă în faptul că numărul ecuaţiilor de rezolvat care trebuie să fie egal cu numărul necunoscutelor

- curenţii ciclici - este egal cu o - numărul ochiurilor independente. Cum o $<$ L , numărul laturilor circuitului electric, se înţelege că spre deosebire de metoda teoremelor lui Kirchhoff cînd trebuia să se rezolve L ecuaţii, în acest caz calculele se simplifică pentru că se rezolvă numai-o-ecuaţii.

Pentru circuitul electric din Fig. 3.71, admitem că prin cele două ochiuri independente circulă curenţii ciclici I_1' şi I_2' cu sensurile alese arbitrar din Fig. 3.72.

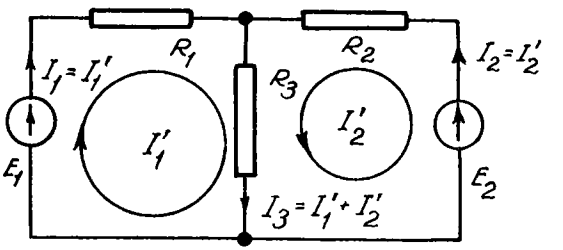


Fig. 3.72. Curenţii ciclici prin circuitul electric (Fig. 3.71)

Curenţii reali prin laturile circuitului pot fi exprimaţi prin aceşti curenţi ciclici . Astfel:

$$I_1 = I_1' \text{ şi } I_2 = I_2' \text{ dar } I_3 = I_1' + I_2'$$

deoarece prin latura a treia trec ambii curenţi ciclici.

Se aplică a doua teoremă a lui Kirchhoff pe ochiurile independente şi se obţine:

$$8\, I_1' + 2\, (I_1' + I_2') = 16$$

$$4\, I_2' + 2\, (I_1' + I_2') = 20$$

sau

$$(8 + 2)\, I_1' + 2\, I_2' = 16$$

$$2\, I_1' + (4 + 2)\, I_2' = 20$$

Sistemul acesta este identic cu cel obţinut prin înlocuirea curentului I_3. Are însă o interpretare diferită. Ecuaţiile în care apar curenţii ciclici se pot scrie sub următoarea formă:

$$\begin{aligned} R_{11} I'_1 + R_{12} I'_2 &= E'_1 \\ R_{21} I'_1 + R_{22} I'_2 &= E'_2 \end{aligned} \qquad (3.74)$$

S-a notat cu R_{11} şi R_{22} rezistenţele proprii ale ochiurilor, întotdeauna pozitive; sînt suma tuturor rezistenţelor din laturile ochiului independent.

S-a notat cu $R_{12} = R_{21}$ rezistenţa comună a ochiurilor. Aceasta reprezintă suma algebrică a tuturor rezistenţelor laturilor comune celor două ochiuri. Se scriu cu plus rezistenţele laturilor parcurse în acelaşi sens de curenţii celor două ochiuri şi cu minus cele parcurse în sensuri contrare.

Se notează cu E'_1 şi E'_2 tensiunile electromotoare ale ochiurilor independente. Tensiunea electromotoare de ochi reprezintă suma algebrică a tuturor tensiunilor electromotoare din ochiul respectiv şi se calculează la fel ca în cazul scrierii teoremei a doua a lui Kirchoff.

Rezolvînd sistemul se obţine:

$$I'_1 = 1 \text{ A} \quad \text{şi} \quad I'_2 = 3 \text{ A}$$

Dar: $I_1 = I'_1 = 1$ A ; $I_2 = I'_2 = 3$ A şi $I_3 = I'_1 + I'_2 = 1 + 3 = 4$ A.

Modul în care se aplică metoda curenţilor ciclici este următorul:

a) Se adoptă sensuri arbitrare pentru curenţii din laturi.

b) Se stabilesc ochiurile independente şi se trasează sensul curenţilor ciclici.

c) Se scriu ecuaţiile în care apar curenţii ciclici pentru ochiurile independente.

d) Se rezolvă sistemul de ecuaţii.

e) Se determină curenţii efectivi din laturi prin însumarea algebrică a curenţilor ciclici corespunzători.

f) Se trasează şi se notează pe schema simplificată curenţii efectivi din laturi.

g) Se verifică rezultatele cu bilanţul puterilor.

Aplicaţia 1.

Să se rezolve circuitul electric din Fig. 3.73 prin metoda curenţilor ciclici.

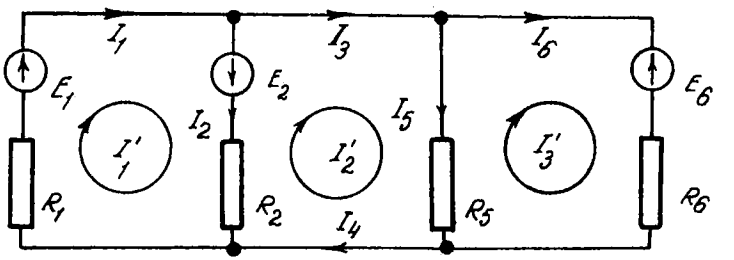


Fig. 3.73. Circuit electric pentru metoda curenţilor ciclici.

Date:

- Tensiunile electromotoare:

$$E_1 = 105\ V\ ;\ E_2 = 20\ V;\ E_6 = 10\ V.$$

- Rezistenţele rezistoarelor electrice:

$$R_1 = 10\,\Omega\ ;\ R_2 = 20\ \Omega\ ;\ R_5 = 10\ \Omega\ ;\ R_6 = 10\,\Omega$$

a şi b) S-au adoptat sensuri arbitrare pentru curenţii din laturi şi sensuri arbitrare pentru curenţii ciclici.

c) Numărul ecuaţiilor este egal cu o = L - N + 1 = 6 - 4 + 1 = 3. Se vor scrie ecuaţiile în care apar curenţii ciclici:

$$\begin{aligned} R_{11}\,I'_1 + R_{12}\,I'_2 + R_{13}\,I'_3 &= E'_1 \\ R_{21}\,I'_1 + R_{22}\,I'_2 + R_{23}\,I'_3 &= E'_2 \\ R_{31}\,I'_1 + R_{32}\,I'_2 + R_{33}\,I'_3 &= E'_3 \end{aligned} \qquad (3.75)$$

Dar:

$$R_{11} = R_1 + R_2 = 10 + 20 = 30\ \Omega$$

$$R_{22} = R_2 + R_5 = 20 + 10 = 30\ \Omega$$

$$R_{33} = R_5 + R_6 = 10 + 10 = 20\ \Omega$$

$$R_{12} = R_{21} = - R_2 = - 20\ \Omega$$

$$R_{13} = R_{31} = 0$$

$$R_{23} = R_{32} = - R_5 = - 10\ \Omega$$

R_{12} şi R 23 respectiv R_{21} şi R_{32} au fost scrise cu semnul minus deoarece laturile comune ochiurilor independente 1 şi 2 respectiv 2 şi 3 sînt parcurse în sensuri contrare de curenţii ciclici.

$$E'_1 = E_1 + E_2 = 105 + 20 = 125\ V$$

$$E'_2 = - E_2 = - 20\ V$$

$$E'_3 = - E_6 = - 10\ V$$

Valorile E'_2 şi E'_3 sînt negative deoarece au sensuri contrare sensurilor curenţilor ciclici.

Prin înlocuire se obţine:

$$30\ I'_1 - 20\ I'_2 = 125$$

$$- 20\ I'_1 + 30\ I'_2 - 10\ I'_3 - 20$$

$$- 10\ I'_2 + 20\ I'_3 = - 10$$

Soluţiile sistemului sînt:

$$I_1' = 7,5 \text{ A} \; ; \; I_2' = 5 \text{ A} \; ; \; I_3' = 2 \text{ A}$$

Curenţii efectivi din laturi rezultă:

$$I_1 = I_1' = 7,5 \text{ A} \; ; \; I_2 = I_1' - I_2' = 7,5 - 5 = 2,5 \text{ A}$$

$$I_3 = I_2' = 5 \text{ A} \; ; \; I_4 = I_2' = 5 \text{ A}; \; I_5 = I_2' - I_3' = 5 - 2 = 3 \text{ A}$$

şi $I_6 = I_3' = 2 \text{ A}$

S-au figurat în schema simplificată curentii efectivi cu sensurile lor (Fig. 3. 74).

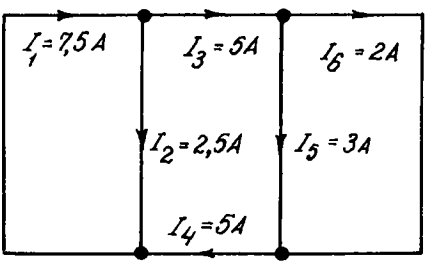


Fig. 3. 74. Curenţii obţinuţi prin rezolvarea circuitului electric (Fig. 3. 73).

Verificarea rezultatelor se face cu bilanţul puterilor.

$$R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_6^2 =$$

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 - E_6 I_6$$

sau:

$$10 . 7,5^2 + 20 . 2,5^2 + 10 . 3^2 + 10 . 2^2 = 105 . 7,5 + 20 . 2,5 - 10 . 2$$

$$817,5 \text{ W} \quad = \quad 817.5 \text{ W}$$

Metoda curenţilor ciclici se aplică şi în cazul circuitelor care conţin generatoare electrice de curent. Ecuaţiile scrise conţin în membrul stîng şi tensiunile de la bornele acestor generatoare de curent. Curentul ciclic atribuit unui ochi independent este determinat dacă ochiul conţine o latură în care se află un generator de curent.

Acesta este egal şi are acelaşi sens ca şi curentul generatorului de curent.

Aplicaţia 2.

Să se rezolve circuitul electric din Fig. 3. 75 prin metoda curenţilor ciclici.

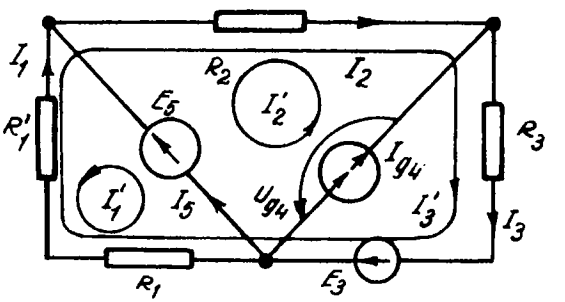


Fig. 3. 75. Circuit electric pentru metoda curenţilor ciclici.

Date:

- Tensiunile electromotoare:

$$E_3 = 10\,V\,;\; E_5 = 10\,V$$

- Curenţii generatoarelor de curent

$$I_{g4} = 1\,A$$

- Rezistenţele rezistoarelor electrice:

$$R_1 = 10\,\Omega\,;\; R'_1 = 10\,\Omega\,;\; R_2 = 20\,\Omega\,;\; R_3 = 20\,\Omega\,;$$

- Necunoscute:

- Curenţii din laturi I_1, I_2, I_3, I_5.

- Tensiunile la bornele generatoarelor de curent Ug_4.

S-au adoptat sensuri arbitrare pentru curenţii din laturi, curenţii ciclici şi tensiunile de la bornele generatoarelor de curent.

Numărul ecuaţiilor este egal cu o = L - N + 1 = 5 - 3 + 1 = 3. Se scriu ecuaţiile în care apar curenţii ciclici şi tensiunile de la bornele generatoarelor:

$$\begin{aligned} R_{11} I'_1 + R_{12} I'_2 + R_{13} I'_3 &= E'_1 \\ R_{21} I'_1 + R_{22} I'_2 + R_{23} I'_3 + Ug_4 &= E'_2 \\ R_{31} I'_1 + R_{32} I'_2 + R_{33} I'_3 &= E'_3 \end{aligned} \qquad (3.76)$$

Ecuaţia a doua nu are sens pentru că $R_{22} \to \infty$; se va înlocui cu relaţia:

$$I'_2 = Ig_4 = 1 \text{ A} .$$

$$R_{11} = R_1 + R'_1 = 10 + 10 = 20\,\Omega$$

$$R_{33} = R_1 + R'_1 + R_2 + R_3 = 10 + 10 + 20 + 20 = 60\,\Omega$$

$$R_{12} = R_{21} = 0$$

$$R_{13} = R_{31} = - (R_1 + R'_1) = - (10 + 10) = - 20\,\Omega$$

$$R_{23} = R_{32} = - R_2 = - 20\,\Omega$$

$$E'_1 = E_5 = 10 \text{ V}$$

$$E'_3 = E_3 = 10 \text{ V}$$

Sistemul devine:

$$20\ I_1' - 20\ I_3' = 10\ V$$

$$-20\ I_1' - 20 \cdot 1 + 60\ I_3' = 10\ V$$

Soluţiile sînt : $I_1' = 1,5$ A ; $I_2' = 1$ A ; $I_3' = 1$ A .
Curenţii efectivi din laturi rezultă:

$$I_1 = I_3' - I_1' = 1 - 1,5 = -0,5\ A;\quad I_2 = I_3' - I_2' = 1 - 1 = 0;$$

$$I_3 = I_3' = 1\ A;\quad I_5 = I_1' - I_2' = 1,5 - 1 = 0,5\ A .$$

Calculul tensiunii de la bornele generatorului de curent Ug_4.

Se aplică teorema a doua a lui Kirchhoff pe ochiul 2.

$$-R_2\ I_2 - Ug_4 = -E_5 \quad \text{sau:}$$

$$-20 \cdot 0 - Ug_4 = -10$$

Rezultă : $Ug_4 = 10$ V

In schema simplificată s-au figurat curenţii efectivi cu sensurile lor precum şi tensiunea de la bornele generatorului de curent (Fig. 3.76).

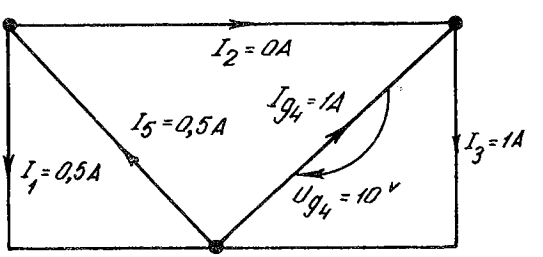


Fig. 3.76. Curenţii obţinuţi prin rezolvarea circuitului electric (Fig. 3.75).

Verificarea rezultatelor se face cu bilanţul puterilor:

$$(R_1 + R_1') I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 = E_3 I_3 + Ug_4 Ig_4 + E_5 I_5$$

Prin înlocuire:

$$(10 + 10)\ 0{,}5^2 + 20 \cdot 0^2 + 20 \cdot 1^2 = 10 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 + 10 \cdot 0{,}5$$

$$25\ W = 25\ W$$

3.16.4. Metoda tensiunilor la noduri

Metoda se foloseşte pentru că simplifică rezolvarea circuitului.

Sistemul de ecuaţii scris cu metoda tensiunilor la noduri conţine un număr de ecuaţii egal cu $N - 1 < L$ mai mic decît numărul ecuaţiilor scrise cînd se aplică metoda teoremelor lui Kirchhoff. In ultimul caz, numărul ecuaţiilor era egal cu L. numărul laturilor. Necunoscutele sînt însă altele. Sînt mărimi ataşate nodurilor şi care se numesc tensiunile nodurilor. Se notează cu litera U. Necunoscutele reale se determină în funcţie de aceste necunoscute auxiliare.

Pentru o prezentare mai simplă în scopul înţelegerii metodei, se foloseşte următorul:

Exemplu . Se va relua circuitul electric prezentat la metoda curenţilor ciclici (Fig. 3.77).

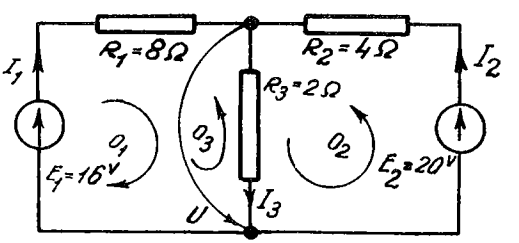


Fig. 3.77. Circuit electric pentru metoda tensiunilor la noduri.

Se alege ca necunoscută tensiunea de la bornele rezistorului R_3 notată cu U şi figurată pe schema circuitului electric din figură.

Tensiunile la bornele celor trei rezistoare şi curenţii prin ele pot fi exprimaţi în funcţie de această tensiune.

Curenţii I_1, I_2 şi I_3 se deduc din teorema a doua a lui Kirchhoff scrisă pe cele 3 ochiuri: o_1; o_2 şi o_3.

$$\text{ochiul } o_1;\ R_1 I_1 + U = E_1 \Rightarrow I_1 = \frac{E_1 - U}{R_1}$$

$$\text{ochiul } o_2;\ R_2 I_2 + U = E_2 \Rightarrow I_2 = \frac{E_2 - U}{R_2}$$

$$\text{ochiul } o_3;\ -R I_3 + U = 0 \Rightarrow I_3 = \frac{U}{R}$$

Conform teoremei întîi a lui Kirchhoff

$$-I_1 - I_2 + I_3 = 0 .$$

Prin înmulţirea cu - 1 şi înlocuirea curenţilor se obţine:

$$\frac{E_1 - U}{R_1} + \frac{E_2 - U}{R_2} - \frac{U}{R_3} = 0$$

Sau grupînd termenii, se transformă relaţia în :

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) U = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R} \qquad (3.77)$$

Inlocuind datele cu valori numerice se va obţine:

$$\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) U = \frac{16}{8} + \frac{20}{4} \Rightarrow U = 8 \text{ V}$$

Valoarea tensiunii obţinute U = 8 V se verifică folosind rezultatele obţinute prin metoda curenţilor ciclici:

$$U = R_3 I_3 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ V}$$

Dacă se notează nodurile cu 1 respectiv 2, ecuaţia obţinută mai sus (3.77) se poate scrie sub forma:

$$G_{11} U_1 = I_{sc1} \tag{3.78}$$

în care

$$U_1 = U \text{ şi } G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

iar

$$I_{sc1} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}$$

Dacă circuitul electric ar fi avut trei noduri, atunci sistemul ar fi avut două ecuaţii:

$$G_{11} U_1 + G_{12} U_2 = I_{sc1}$$

$$G_{21} U_1 + G_{22} U_2 = I_{sc2} \; . \tag{3.79}$$

S-a notat:

U_1 şi U_2 tensiunile între nodurile 1 şi 3 respectiv între nodurile 2 şi 3.

G_{11} şi G_{22} reprezintă conductanţele proprii ale nodurilor; întotdeauna sînt pozitive şi se calculează ca suma tuturor conductanţelor la nod.

$G_{12} = G_{21}$ reprezintă conductanţa comună între nodul 1 şi nodul 2; întotdeauna negativă şi se calculează ca suma tuturor conductanţelor legate direct între nodurile 1 şi 2.

I_{sc1} şi I_{sc2} reprezintă curenţii de scurtcircuit. Un curent de scurtcircuit se calculează ca sumă algebrică a tuturor curenţilor pe care îi trimite în nod sursele din laturi legate la acel nod dacă laturile ar fi scurtcircuitate la borne.

Se scriu cu semnul plus curenţii de scurtcircuit care intră în nod şi cu minus în caz contrar. Curenţii de scurtcircuit ai laturilor pasive (care conţin numai rezistenţe) sînt nuli.

In cazul în care într-o ecuaţie apare o conductanţă infinită (rezistenţă egală cu zero) se înlocuieşte această ecuaţie cu o relaţie matematică mai simplă după cum se va constata din aplicaţia a doua care urmează.

Pentru rezolvarea unui circuit electric prin metoda tensiunilor la noduri se procedează astfel:

a) Se stabilesc sensuri arbitrare pentru curenţii din laturile circuitului electric.

b) Se notează cu simboluri tensiunile a N - 1 noduri ale circuitului electric.

c) Se scriu ecuaţiile (3.79) pentru N - 1 noduri.

d) Se rezolvă sistemul de ecuaţii pentru determinarea necunoscutelor auxiliare: tensiunile la noduri.

e) Se calculează curenţii din laturi.

Aplicaţia 1.

Să se rezolve circuitul electric din Fig. 3.78 prin metoda tensiunilor la noduri.

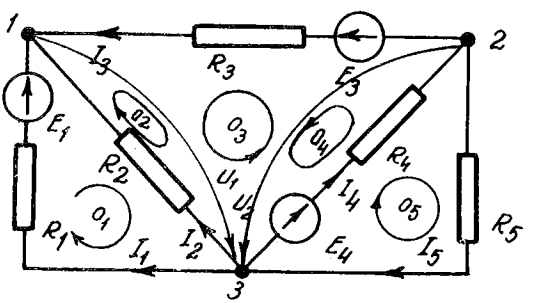


Fig. 3.78. Circuit electric pentru metoda tensiunilor la noduri.

Date.

Tensiunile electromotoare:

$$E_1 = 2\ V;\ E_3 = 1,5\ V;\ E_4 = 15\ V.$$

Rezistenţele rezistoarelor electrice:

$$R_1 = 3\,\Omega\,;\ R_2 = 2{,}5\,\Omega\,;\ R_3 = 2\,\Omega\,;$$

$$R_4 = 1\,\Omega\,;\ R_5 = 5\,\Omega\,.$$

Necunoscute:

curenţii din laturi I_1; I_2; I_3; I_4 şi I_5.

S-au adoptat sensuri arbitrare pentru curenţii din laturi şi pentru tensiunile U_1 şi U_2.

Se scrie sistemul de N-1 = 3 - 1 = 2 ecuaţii şi tot două necunoscute auxiliare după cum urmează:

$$G_{11}\,U_1 + G_{12}\,U_2 = I_{sc1}$$

$$G_{21}\,U_1 + G_{22}\,U_2 = I_{sc2}$$

Se determină coeficienţii sistemului şi termenii liberi:

$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2{,}5} + \frac{1}{2} = \frac{37}{30}\,\Omega^{-1}$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5} = \frac{17}{10}\,\Omega^{-1}$$

$$G_{12} = G_{21} = -\left(\frac{1}{R_3}\right) = -\frac{1}{2}\,\Omega^{-1}$$

$$I_{sc1} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_3}{R_3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}\ \text{A}$$

$$I_{sc2} = -\frac{E_3}{R_3} + \frac{E_4}{R_4} = \frac{-1}{2} + \frac{15}{1} = \frac{29}{2}\,\text{A}$$

Sistemul devine:

$$\frac{37}{30}\,U_1 - \frac{1}{2}\,U_2 = \frac{7}{6}$$

$$-\frac{1}{2}\,U_1 + \frac{17}{10}\,U_2 = \frac{29}{2}$$

Soluţiile sistemului sînt: $U_1 = 5$ V şi $U_2 = 10$ V

Se determină necunoscutele principale (curenţii din laturi) scriind L ecuaţii cu teorema a doua a lui Kirchhoff după cum urmează:

ochiul o_1; $R_1 I_1 + U_1 = E_1 \Rightarrow I_1 = \frac{E_1 - U_1}{R_1} = \frac{2 - 5}{3} = -1$ A

ochiul o_2; $R_2 I_2 + U_1 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{-U_1}{R_2} = \frac{-5}{2,5} = -2$ A

ochiul o_3; $R_3 I_3 + U_1 - U_2 = E_3 \Rightarrow I_3 = \frac{E_3 - U_1 + U_2}{R_3} = \frac{1-5+10}{2} = 3$ A

ochiul o_4; $R_4 I_4 + U_2 = E_4 \Rightarrow I_4 = \frac{E_4 - U_2}{R_4} = \frac{15 - 10}{1} = 5$ A

ochiul o_5; $R_5 I_5 - U_2 = 0 \Rightarrow I_5 = \frac{U_2}{R_5} = \frac{10}{5} = 2$ A

In schema simplificată din Fig. 3.79 se trasează curenţii cu sensurile lor efective.

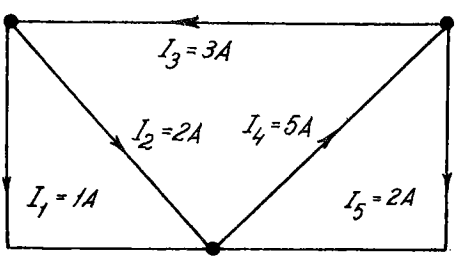


Fig. 3.79. Curenţii obţinuţi prin rezolvarea circuitului electric (Fig. 3.78).

Verificarea se face cu bilanţul puterilor:

$$R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 =$$

$$- E_1 I_1 + E_3 I_3 + E_4 I_4.$$

$$3 \cdot 1^2 + 2{,}5 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 5^2 + 5.2^2 = -2.1 + 1.3 + 15{,}5$$

$$76\ W = 76\ W$$

Metoda tensiunilor la noduri se aplică şi în cazul circuitelor electrice care conţin generatoare electrice de curent. Pentru laturile care conţin generatoare ideale de curent, curentul de scurtcircuit este chiar curentul debitat de generatorul ideal de curent. In suma algebrică a curenţilor de scurtcircuit din laturile care concură într-un nod, semnul algebric al curentului debitat de un generator ideal de curent se atribuie la fel ca la curenţii de scurtcircuit din laturile în care există surse de tensiune electrică.

Aplicaţia 2. Să se rezolve circuitul electric din Fig. 3.80 prin metoda tensiunilor la noduri.

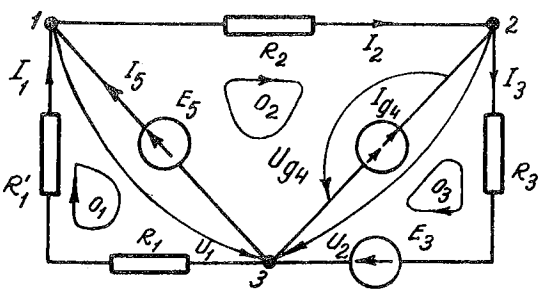


Fig. 3.80. Circuit electric pentru metoda tensiunilor la noduri.

Date:

- Tensiunile electromotoare:

$$E_3 = 10V;\ E_5 = 10\,V;$$

- Curenţii generatoarelor de curent:

$$Ig_4 = 1\ A;$$

- Rezistenţele rezistoarelor electrice:

$$R_1 = 10\Omega \; ; \; R_1' = 10\Omega \; ; \; R_2 = 20\Omega \; ; \; R_3 = 20\ \Omega \; ;$$

Necunoscute:

- Curenţii din laturi $I_1; I_2; I_3; I_5;$

- Tensiunile la bornele generatoarelor de curent : Ug_4.

S-au adoptat sensuri arbitrare pentru curenţii din laturi, tensiunile U_1 şi U_2 şi tensiunea Ug_4 de la bornele generatorului de curent Ig_4.

Se scrie sistemul de N - 1 = 3 - 1 = 2 ecuaţii şi tot două necunoscute auxiliare, după cum urmează:

$$G_{11} U_1 + G_{12} U_2 = I_{sc1}$$

$$G_{21} U_1 + G_{22} U_2 = I_{sc2}$$

Se determină coeficienţii sistemului şi termenii liberi:

$$G_{11} = \frac{1}{R_1+R_1'} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{10+10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{0} \rightarrow \infty$$

(rezistenţa sursei ideale E_5 este nulă, $R_5 = 0$)

$$G_{12} = G_{21} = - \frac{1}{R_2} = - \frac{1}{20}$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{\infty} = \frac{2}{20}$$ (rezistenţa generatorului ideal Ig_4 este infinită $R_4 \rightarrow \infty$)

$$I_{sc1} = \frac{E_5}{R_5} = \frac{10}{\infty} \rightarrow \infty$$

$$I_{sc2} = - \frac{E_3}{R_3} + Ig_4 = - \frac{10}{20} + 1 = \frac{1}{2} \text{ A}$$

Ecuaţia întîi nu are sens deoarece $G_{11} \to \infty$ şi $I_{sc1} \to \infty$
Această ecuaţie se va înlocui cu relaţia

$$U_1 = E_5 = 10 \text{ V}$$

scrisă pe baza teoremei a doua a lui Kirchhoff.
Din ultima ecuaţie se obţine tensiunea U_2 :

$$-\frac{1}{20} \cdot 10 + \frac{2}{20} U_2 = \frac{1}{2} \to U_2 = 10 \text{ V}$$

Se determină necunoscutele principale (curenţii din laturi şi tensiunea la bornele generatorului de curent) scriind relaţiile necesare cu teoremele lui Kirchhoff după cum urmează:

Curentul I_1; se scrie teorema a doua a lui Kirchhoff pe ochiul o_1

$$(R_1 + R_1')\, I_1 + U_1 = 0 \to I_1 = -\frac{U_1}{R_1 + R_1'} = \frac{-10}{10+10} = -0{,}5 \text{ A}$$

Curentul I_2; - se scrie teorema a doua a lui Kirchhoff pe ochiul o_2

$$R_2 I_2 + U_2 = E_5 \to I_2 = \frac{E_5 - U_2}{R_2} = \frac{10 - 10}{20} = 0 \text{ A}$$

Curentul I_3; - se scrie teorema a doua a lui Kirchhoff pe ochiul o_3

$$R_3 I_3 - U_2 = E_3 \to I_3 = \frac{E_3 + U_2}{R_3} = \frac{10 + 10}{20} = 1 \text{ A}$$

Tensiunea Ug_4; - se observă că $Ug_4 = U_2 = 10$ V

Curentul I_5; - se scrie teorema întîi a lui Kirchhoff pentru nodul 1

$$I_5 = I_2 - I_1 = 0 - (-0{,}5) = 0{,}5 \text{ A}$$

In schema simplificată din Fig. 3.181 se trasează curenţii şi tensiunea de la bornele generatorului de curent cu sensurile lor efective.

Rezultatele obţinute coincid cu soluţiile aceleaşi probleme rezolvată prin metoda curenţilor ciclici.

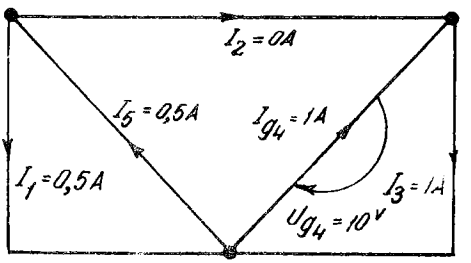


Fig. 3.81. Curenţii obţinuţi prin rezolvarea circuitului electric (Fig. 3.80)

Tensiunile la noduri se pot exprima în funcţie de potenţialele la noduri. In acest caz, necunoscutele auxiliare sînt potenţiale iar metoda este cunoscută sub denumirea: metoda potenţialelor la noduri. Este mult mai răspîndită în aplicaţii această formă.

Numărul de ecuaţii este egal tot cu N - 1 în care N reprezintă numărul nodurilor reţelei. Potenţialul nodului se notează cu Va în care indicele a reprezintă numărul nodului. Pentru a se scrie numai N-1 ecuaţii este necesar ca potenţialul unuia din nodurile reţelei să fie ales arbitrar. Este indicat să se aleagă acest potenţial egal cu zero pentru simplificarea calculelor.

Pentru un circuit cu N = 3 noduri, numărul ecuaţiilor care se scrie este N-1 = 3 - 1 = 2 ecuaţii. Forma este următoarea:

$$\begin{aligned} G_{11} V_1 + G_{12} V_2 &= I_{sc1} \\ G_{21} V_1 + G_{22} V_2 &= I_{sc2} \end{aligned} \qquad (3.80)$$

Aici, conductanţele G_{11}, $G_{12} = G_{21}$, G_{22} şi curenţii de scurt-circuit I_{sc1} şi I_{sc2} au aceeaşi semnificaţie ca în cazul metodei tensiunilor la noduri.

Necunoscutele principale-curenţii din laturi-se determină cu expresia:

$$I_{ab} = G_{ab} (E_{ab} + V_a - V_b)$$

în care: I_{ab} - curentul din latura legată între nodurile a şi b; sensul curentului este de la nodul a spre b.

G_{ab} - conductanţa din latura respectivă legată între nodurile a şi b.

E_{ab} - tensiunea electromotoare a sursei de tensiune din aceeaşi latură.

V_a - potenţialul nodului a.

V_b - potenţialul nodului b.

Aplicaţie

Să se rezolve circuitul electric din Fig. 3.82 cu metoda potenţialelor la noduri.

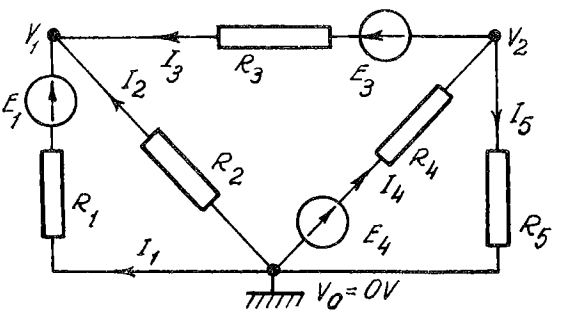


Fig. 3.82 Circuit electric pentru metoda potenţialelor la noduri.

Date:

- Tensiunile electromotoare:

$$E_1 = 2 \text{ V}; \; E_3 = 1 \text{ V}; \; E_4 = 15 \text{ V}$$

Rezistenţele rezistoarelor electrice:

$$R_1 = 3\,\Omega \; ; \; R_2 = 2{,}5\,\Omega ; \; R_3 = 2\,\Omega ; \; R_4 = 1\Omega \; ; \; R_5 = 5\,\Omega$$

Necunoscute:

Curenţii din laturi: I_1; I_2 ; I_3; I_4 şi I_5.

S-au adoptat sensuri arbitrare pentru curenţii din laturi.

Se scrie sistemul de N - 1 = 3 - 1 = 2 ecuaţii şi tot două necunoscute auxiliare: V_1 şi V_2.

$$G_{11} V_1 + G_{12} V_2 = I_{sc1}$$

$$G_{21} V_1 + G_{22} V_2 = I_{sc2}$$

Valorile coeficienţilor sistemului şi termenii liberi s-au calculat:

$$G_{11} = \frac{37}{30}\ \Omega - 1; \quad G_{22} = \frac{17}{10}\ \Omega - 1; \quad G_{12} = G_{21} = -\frac{1}{2}\ \Omega - 1$$

$$I_{sc1} = \frac{7}{6}\ A\ ; \quad I_{sc2} = -\frac{29}{2}\ A$$

Sistemul devine:

$$\frac{37}{30} V_1 - \frac{1}{2} V_2 = \frac{7}{6}$$

$$-\frac{1}{2} V_1 + \frac{17}{10} V_2 = \frac{29}{2}$$

Soluţiile sistemului sînt : $V_1 = 5V$ şi $V_2 = 10\ V$

Se determină curenţii din laturi folosind relaţia:

$$I_{ab} = G_{ab} (E_{ab} + V_a - V_b)$$

Curentul $I_1 = I_{01} = G_{01} (E_{01} + V_0 - V_1) = \frac{1}{3}(2 + 0 - 5) = -1\ A$

Tensiunea $E_{01} = E_1$ cu sensul de la nodul 0 la nodul 1.

Analog:

$$I_2 = \frac{1}{2,5}\left(0 + 0 - 5\right) = -2\ A$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\left(1 + 10 - 5\right) = 3\ A$$

$$I_4 = \frac{1}{1}\left(15 + 0 - 10\right) = 5\ A$$

$$I_5 = \frac{1}{5}\left(0 + 10 - 0\right) = 2\ A$$

Curenţii I_1 şi I_2 au sensuri reale inverse faţă de cele alese iniţial în Fig. 3.82.

In Fig. 3.83 s-au reprezentat curenţii pe schema simplificată.

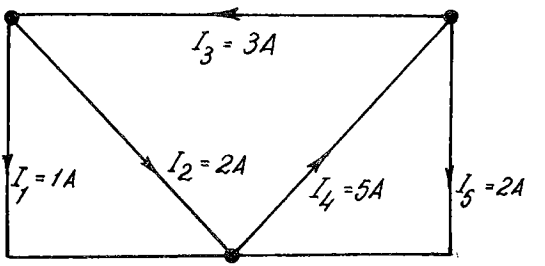


Fig. 3.83. Curenţii obţinuţi prin rezolvarea circuitului electric (Fig. 3.82).

Metoda potenţialelor la noduri este cea mai indicată în rezolvarea circuitelor cu surse electrice (generatoare electrice) comandate care apar în electronică.

3.17. Metode de simplificare a circuitelor electrice

In scopul simplificării calculelor necesare rezolvării unui circuit electric, s-au elaborat metode care vor fi expuse în continuare. Prin aplicarea acestor metode, numărul de ecuaţii determinat cu teoremele lui Kirchhoff, metoda curenţilor ciclici sau metoda potenţialelor la noduri se reduc.

3.17.1. Metoda rezistenţelor echivalente

Un circuit electric se numeşte pasiv, cînd nu are surse de curent continuu. In raport cu două borne de acces A şi B (Fig. 3.84) se poate defini no-

ţiunea de rezistenţă echivalentă R_e ca fiind raportul dintre tensiunea aplicată la bornele de acces U_{AB} şi intensitatea curentului absorbit:

$$R_e = \frac{U_{AB}}{I_{AB}} \tag{3.81}$$

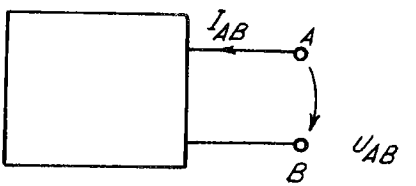


Fig. 3.84. Circuit electric pasiv

Rezistenţele care compun un circuit electric pot fi legate în cele mai diverse moduri dar pentru calculul rezistenţei echivalente este necesar a se cunoaşte legarea în serie şi în paralel a rezistoarelor.

3.17.2. Legarea în serie a rezistoarelor

La legarea în serie, rezistoarele fac parte dintr-o porţiune neramificată de circuit, curentul care le străbate este acelaşi iar tensiunile la bornele lor se însumează pentru a obţine tensiunea totală aplicată grupului de rezistoare (conform teoremei a doua a lui Kirchhoff).

Pentru Fig. 3.85 se scrie:

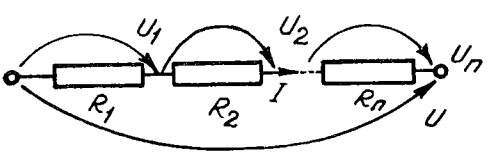


Fig. 3.85. Legarea în serie a rezistoarelor.

$$U = U_1 + U_2 + \ldots U_n = (R_1 + R_2 + \ldots + R_n)\, I$$

Dar $U = R_e I$ de unde rezultă:

$$R_e = R_1 + R_2 + \ldots + R_n \qquad (3.82)$$

Divizorul de tensiune (Fig. 3.86). Se observă că la conectarea în serie a rezistoarelor, tensiunea totală U se repartizează pe rezistoarele înseriate. Acesta reprezintă un divizor de tensiune. In cazul a două rezistoare R_1 şi R_2 legate în serie, tensiunea divizată pe cele două rezistoare se calculează cu următoarele relaţii:

Tensiunea pe rezistorul R_1:

$$U_1 = R_1 I$$

Dar $I = \dfrac{U}{R_1 + R_2}$ (3.83)

Rezultă că: $U_1 = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}\, U$ şi

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\, U$$

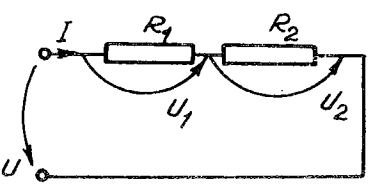


Fig. 3.86. Divizorul de tensiune.

Conductanţa echivalentă a conductanţelor legate în serie se determină cu formula:

$$\frac{1}{G_e} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{G_n} \qquad (3.84)$$

In cazul a două conductanţe legate în serie, conductanţa echivalentă se determină cu:

$$G_e = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \qquad (3.85)$$

Conductanţa echivalentă este raportul dintre produsul celor două conductanţe legate în serie şi suma acestor două conductanţe.

3.17.3. Legarea în paralel a rezistoarelor (Fig. 3.87).

La legarea în paralel, rezistoarele sînt parcurse de curenţi care pleacă de la o bornă comună şi sosesc la cealaltă bornă comună; între aceste două borne este aplicată tensiunea care este aceeaşi pentru toate rezistoarele.

Conform teoremei întîi a lui Kirchhoff,

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n .$$

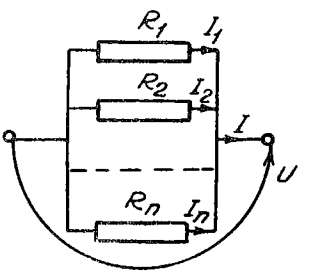


Fig. 3.87. Legarea în paralel a rezistoarelor

Dar rezistenţa echivalentă am definit-o ca:

$$R_e = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_1 + I_2 + \ldots + I_n}$$

dar $I_1 = \frac{U}{R_1}$; $I_2 = \frac{U}{R_2}$; . . . $I_n = \frac{U}{R_n}$.

Prin înlocuire:

$$R_e = \frac{U}{\frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \ldots + \frac{U}{R_n}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}}$$

Rezultă în final:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} \qquad (3.86)$$

Divizorul de curent (Fig. 3.88) Se observă că la conectarea în paralel a rezistoarelor, curentul total I se divide în rezistoarele conectate în paralel. Acesta reprezintă un divizor de curent. In cazul a două rezistoare R_1 şi R_2 legate în paralel, curentul divizat pe cele două rezistoare se calculează cu următoarele relaţii:

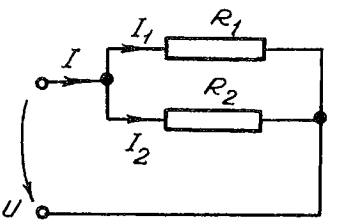


Fig. 3.88. Divizorul de curent

Curentul prin rezistorul R_1

$$I_1 = \frac{U}{R_1}$$

Curentul total prin divizor este

$$I = \frac{U}{R_e} .$$

Rezultă că

$$I_1 = \frac{R_e}{R_1} I = \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{R_1} I$$

sau

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \qquad (3.87)$$

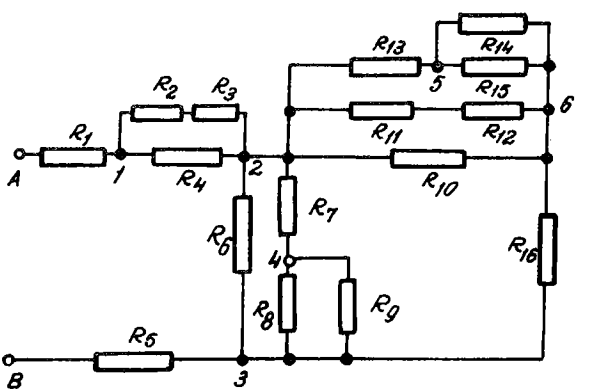
respectiv

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I \ .$$

Conductanţa echivalentă a conductoarelor legate în paralel se determină în formula:

$$G_e = G_1 + G_2 + \ldots\ldots + G_n \qquad (3.88)$$

Aplicaţie. Să se determine rezistenţa echivalentă în raport cu bornele A şi B, R_{AB}, pentru circuitul din Fig. 3.89.



Fog. 3.89. Circuit electric pentru calcularea rezistenţei echivalente R_{AB}.

Valorile rezistenţelor sînt următoarele:

$R_1 = 1\ \Omega$; $R_2 = 11\ \Omega$; $R_3 = 7\ \Omega$;
$R_4 = 9\ \Omega$; $R_5 = 1\ \Omega$; $R_6 = 4\ \Omega$;
$R_7 = 9\ \Omega$; $R_8 = 4\ \Omega$; $R_9 = 12\ \Omega$;
$R_{10} = 15\ \Omega$; $R_{11} = 7\ \Omega$; $R_{12} = 8\ \Omega$;
$R_{13} = 10\ \Omega$; $R_{14} = 30\ \Omega$; $R_{15} = 6\ \Omega$;
$R_{16} = 1\ \Omega$.

Succesiv se determină rezistenţele echivalente a rezistenţelor legate în serie sau în paralel.

- Grupul de rezistenţe: R_2 R_3 şi R_4.

$$R_{1,2} = \frac{R_4 (R_2 + R_3)}{R_2 + R_3 + R_4} = \frac{9 (11 + 7)}{11 + 7 + 9} = \frac{162}{27} = 6\ \Omega$$

Grupul de rezistenţe : R_{13}, R_{14}, R_{15}.

$$R'_{2,6} = R_{13} + \frac{R_{14} \cdot R_{15}}{R_{14} + R_{15}} = 10 + \frac{30 \cdot 6}{30 + 6} = 15\ \Omega$$

- Grupul R_{10}, R_{11}, R_{12}, $R'_{2,6}$. $\frac{1}{R_{2,6}} = \frac{1}{R_{10}} + \frac{1}{R_{11}+R_{12}} + \frac{1}{R'_{2,6}} =$

$$= \frac{1}{15} + \frac{1}{7 + 8} + \frac{1}{15} = \frac{3}{15}\ \Omega^{-1} \rightarrow R_{26} = 5\ \Omega$$

- Grupul R_7, R_8, R_9. $R'_{2,3} = R_7 + \frac{R_8 R_9}{R_8 + R_9} = 9 + \frac{4.12}{4 + 12} = 12\ \Omega$

Circuitul electric a devenit (Fig. 3. 90)

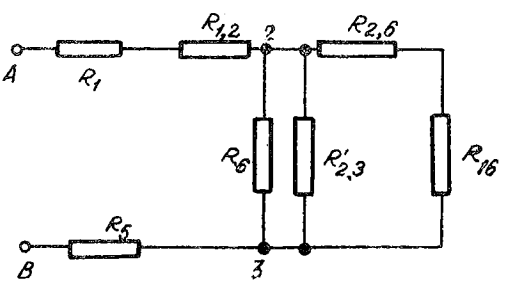


Fig. 3. 90. Circuitul electric (Fig. 3. 89). simplificat.

Se calculează:

$$\frac{1}{R_{2,3}} = \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R'_{2,3}} + \frac{1}{R_{16} + R_{2,6}} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{1 + 5} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}\ \Omega^{-1}$$

$$R_{2,3} = 2\ \Omega$$

Rezistenţa echivalentă între bornele A şi B:

$$R_{AB} = R_1 + R_{1,2} + R_{2,3} + R_5 = 1 + 6 + 2 + 1 = 10\ \Omega$$

3.17.4. Teorema lui Vaschy.

Această teoremă se aplică tot în scopul simplificării unui circuit electric în vederea rezolvării lui cu un număr mai mic de ecuaţii.

Prin această teoremă, se afirmă:

In laturile care concură la un nod de reţea se pot intercala surse de tensiuni electromotoare egale pe fiecare latură, cu condiţia ca sensurile tensiunilor electromotoare să fie orientate identic faţă de nod.

In urma acestei operaţii, numărul surselor se reduce şi se ajunge astfel la un circuit mai simplu.

Teorema se demonstrează dar în cadrul acestei cărţi se va rezolva numai un circuit electric.

Aplicaţie - Să se rezolve circuitul electric din Fig. 3.91.

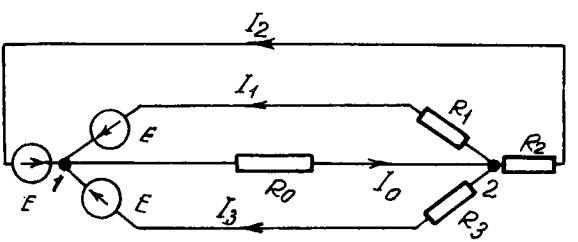


Fig. 3.91. Circuit electric pentru teorema Vaschy.

Date:

Tensiunile electromotoare

$$E = 48\ V\ .$$

Rezistenţele rezistoarelor electrice:

$$R_0 = 2\Omega\ ;\ R_1 = 4\Omega;\ R_2 = 6\ \Omega;\ R_3 = 12\ \Omega\ .$$

Necunoscute:

Curenţii din laturi : I_0; I_1 ; I_2 ; I_3.

Problema se simplifică prin aplicarea teoremei lui Vaschy în nodul 1; se introduc în cele 4 laturi care se leagă în nodul 1 cîte o sursă de tensiune electromotoare de acceaşi valoare E = 48 V şi cu sensul de referinţă spre nodul 2 (Fig. 3.92).

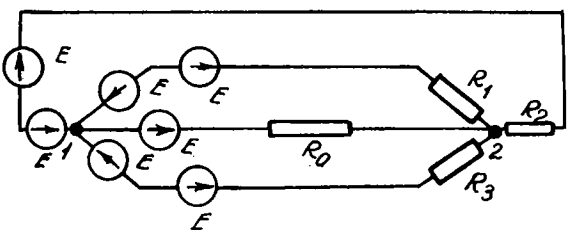


Fig. 3.92. Introducerea surselor E în circuitul electric (Fig. 3.91).

In laturile 1, 2 şi 3 în care există două surse egale şi de sens contrar, efectul lor este nul pentru că se anihilează reciproc. Circuitul devine Fig. 3.93 .

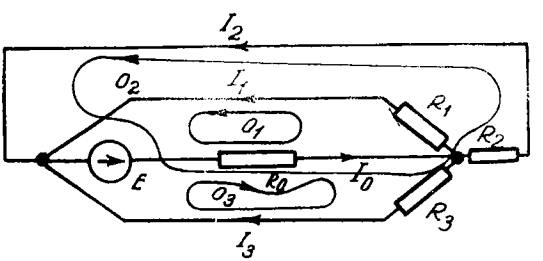


Fig. 3.93. Circuitul electric (Fig. 3.91) simplificat.

Rezolvarea circuitului se face prin determinarea rezistenţei echivalente a rezistenţelor R_1, R_2 şi R_3 legate în paralel:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12}$$

respectiv : $R_e = \frac{12}{6} = 2\ \Omega$

Circuitul electric se simplifică şi devine ca în Fig. 3.94 .

Curentul I_o $\frac{E}{R_o + R_e} = \frac{48}{2 + 2} = 12$ A

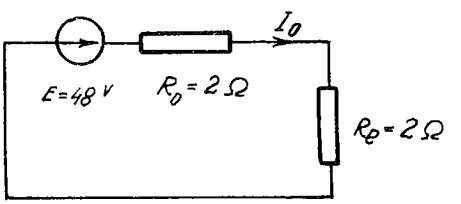


Fig. 3.94. Circuitul electric (Fig. 3.92) simplificat.

Pe circuitul din Fig. 3.93 aplicînd ochiurilor respective teorema a doua a lui Kirchhoff se obţin curenţii în laturile 1, 2 şi 3.

Ochiul o_1; $R_0 I_0 + R_1 I_1 = E \rightarrow I_1 = \frac{E - R_0 I_0}{R_1} = \frac{48 - 2.12}{4} = 6$ A .

Ochiul o_2; $I_2 = \frac{E - R_0 I_0}{R_2} = \frac{48 - 2 . 12}{6} = 4$ A .

Ochiul o_3; $I_3 = \frac{E - R_0 I_0}{R_3} = \frac{48 - 2 . 12}{12} = 2$ A

Verificarea rezultatelor se poate face cu teorema întîi a lui Kirchhoff scrisă pentru nodul 1:

$$I_0 = I_1 + I_2 + I_3 = 6 + 4 + 2 = 12 \text{ A}$$

3.18. Metode de rezolvare parţială a unui circuit electric de curent continuu

In unele aplicaţii, se cere determinarea unui curent printr-o latură şi nu rezolvarea completă a circuitului electric de curent continuu. Pentru acest scop, se aplică teorema generatorului echivalent de tensiune şi generatorului echivalent de curent, descrise în continuare.

3.18.1. Metoda generatorului echivalent de tensiune (Teorema lui Thévenin).

Avantajul metodei generatorului echivalent de tensiune electromotoare, faţă de metodele prezentate, constă în aceea că rezistenţa din latura în care se cere determinarea curentului poate fi variabilă (sarcină variabilă) ceea ce se întîlneşte în problemele date spre rezolvare.

Circuitul electric examinat se împarte în două, în raport cu două borne date A şi B; latura în care este plasată rezistenţa R_{AB} şi restul circuitului electric (Fig. 3.95).

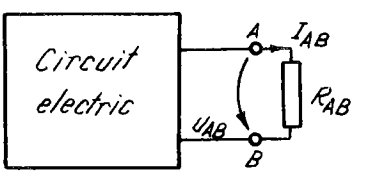


Fig. 3.95. Circuit electric cu rezistenţa R_{AB} legată în exterior.

După teorema generatorului echivalent de tensiune (teorema lui Thévenin), restul circuitului electric poate fi echivalat printr-o singură sursă de tensiune electromotoare şi rezistenţă internă R_{AB_0}; circuitul electric se simplifică şi se reduce la schema prezentată în Fig. 3.96 .

Curentul I_{AB} se calculează cu expresia:

$$I_{AB} = \frac{U_{AB0}}{R_{AB} + R_{AB0}} \tag{3.89}$$

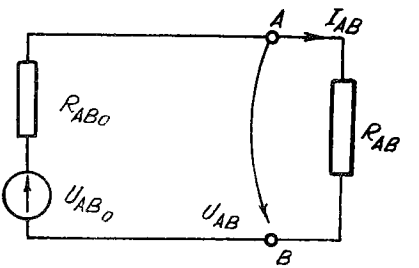


Fig. 3.96. Circuitul electric pentru metoda generatorului echivalent de tensiune.

Deci, soluţia problemei se obţine plecînd de la determinarea tensiunii electromotoare U_{AB0} şi rezistenţa internă R_{AB0}.

Conform teoremei lui Thévenin tensiunea electromotoare U_{AB0} este egală cu tensiunea la bornele AB atunci cînd rezistenţa R_{AB} este dezlegată (regimul de mers în gol).

Rezistenţa internă a sursei R_{AB0} este rezistenţa echivalentă a circuitului electric în raport cu bornele A şi B atunci cînd circuitul electric este pasivizat (toate sursele sînt presupuse că au tensiunile electromotoare egale cu zero).

Aplicaţie. Pentru circuitul din Fig. 3.97 să se determine relaţia dintre curent şi puterea disipată în rezistorul de rezistenţă R_{AB} (rezistenţa de sarcină).

Date

- Tensiunile electromotoare

$$E_1 = 232V \quad , \quad E_2 = 228V$$

- Rezistenţele interne ale generatoarelor;

$$R_{i1} = R_{i2} = 0,4\ \Omega$$

- Rezistenţa de sarcină:

R_{AB} variază între 0 şi 1Ω.

Se cere:

- relaţia $I_{AB} = f(R_{AB})$

- Randamentul η.

Curentul se determină din:

$$I_{AB} = \frac{U_{AB0}}{R_{AB} + R_{AB0}}$$

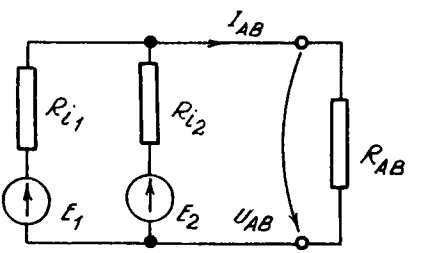


Fig. 3.97. Circuitul electric pentru metoda generatorului echivalent de tensiune.

Pentru calculul lui U_{AB0} se scrie ecuaţiile cu a doua teoremă a lui Kirchhoff pe ochiurile 0_1 şi 0_2 (Fig. 3.98):

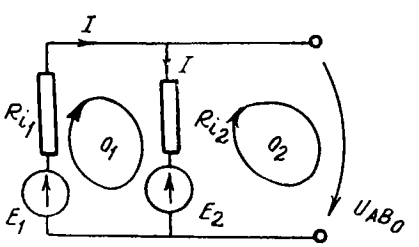


Fig. 3.98. Calculul lui U_{AB0}.

Ochiul o_1 ; $\quad R_{i1} I + R_{i2} I = E_1 - E_2$

Ochiul o_2 ; $\quad - R_{i2} I + U_{AB0} = E_2$

Rezultă : $\quad I = \dfrac{E_1 - E_2}{R_{i1} + R_{i2}} = \dfrac{232 - 228}{0,4 + 0,4} = 5 \text{ A}$

şi

$$U_{AB0} = E_2 + R_{i2} I = 228 + 0,4 \cdot 5 = 230 \text{ V}$$

Rezistenţa internă a sursei echivalente R_{AB0} se determină prin pasivizarea circuitului electric şi calculul rezistenţei echivalente în raport cu bornele A şi B (Fig. 3. 99):

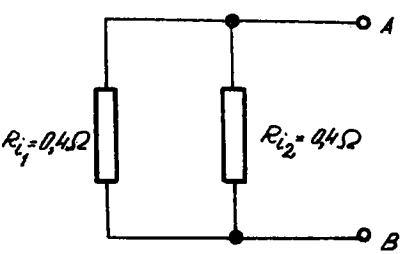


Fig. 3. 99. Calculul lui R_{AB0}.

$$R_{AB0} = \frac{R_{i1} R_{i2}}{R_{i1} + R_{i2}} = \frac{0,4 \cdot 0,4}{0,4 + 0,4} = \frac{0,16}{0,8} = 0,2 \ \Omega$$

Relaţia $I_{AB} = f (R_{AB})$ se determină din:

$$I_{AB} = \frac{U_{AB0}}{R_{AB} + R_{AB0}} = \frac{U_{AB0}}{R_{AB0}} \quad \frac{1}{\dfrac{R_{AB}}{R_{AB0}} + 1} = \frac{230}{0,2} \quad \frac{1}{1 + \dfrac{R_{AB}}{R_{AB0}}}$$

$$I_{AB} = 1150 \quad \frac{1}{1 + \dfrac{R_{AB}}{R_{AB0}}}$$ reprezintă $I_{AB} = f (R_{AB})$.

Cu ajutorul acestei relaţii, se calculează curenţii pentru diferite valori ale lui R_{AB} (Tabelul 3.7).

Tabelul 3.7

$\frac{R_{AB}}{R_{AB0}}$	0	0,5	1	2	3	5
$R_{AB}(\Omega)$	0	0,1	0,2	0,4	0,6	1,0
$I_{AB}(A)$	1150	766	575	383	287,5	191,5

Determinarea puterii disipate în rezistenţa de sarcină în funcţie de R_{AB} : $P = f(R_{AB})$

Din tabelul 3.7 se calculează $P = R_{AB} I_{AB}^2$

Se întocmeşte Tabelul 3.8

Tabelul 3.8

$\frac{R_{AB}}{R_{AB0}}$	0	0,5	1	2	3	5
P (kW)	0	58,7	66,12	58,7	49,5	36,7

Determinarea randamentului η. Randamentul reprezintă raportul între puterea disipată în rezistenţa de sarcină (P) şi puterea debitată de sursa echivalentă (Ps)

$$\frac{P}{P_s} = \frac{R_{AB} I_{AB}^2}{(R_{AB} + R_{AB0}) I_{AB}^2} \qquad \frac{1}{1 + \frac{R_{AB0}}{R_{AB}}}$$

Randamentul pentru regimurile caracteristice:

$$R_{AB} = 0 \quad \text{(scurtcircuitat)} \quad \longrightarrow \quad \eta = \frac{0}{0 + R_{AB0}} = 0$$

$$R_{AB} = R_{AB0} \longrightarrow \eta = \frac{R_{AB0}}{R_{AB0} + R_{AB0}} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ sau } 50\%$$

$$R_{AB} = \infty \quad \text{(mers în gol)} \qquad \eta = \frac{1}{1 + \frac{R_{AB0}}{\infty}} = 1 \text{ sau } 100\%$$

Randamentul creşte cu creşterea raportului $\frac{R_{AB}}{R_{AB0}}$ şi atinge o valoare maximă (100%), teoretic, în regimul de mers în gol.

In Fig. 3.100 s-a reprezentat graficul variaţiei puterii şi randamentului în funcţie de raportul între rezistenţa circuitului exterior R_{AB} şi rezistenţa internă a sursei R_{AB0}.

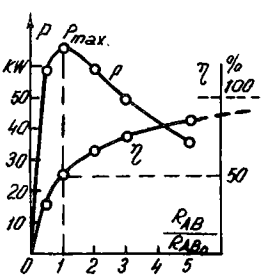


Fig. 3.100. Variaţia puterii şi randamentului.

In practică, se alege regimul de putere maximă sau regimul de randament maxim pentru circuitul din Fig. 3.96 după cum urmează:

Pentru circuitele de putere mică (de ex. aparate electronice) în care pierderea de energie nu este importantă, se alege adesea $R_{AB} = (1 \div 3) R_{AB0}$ obţinînd un regim aproape de puterea maximă (transfer maxim de putere) în rezistenţa receptorului R_{AB}.

Randamentul este egal în acest caz cu 50 ÷ 75%.

Pentru circuite de putere medie şi ridicată se urmăreşte obţinerea unui randament ridicat şi pierderi de energie cît mai mici.

In aceste circuite se alege $R_{AB} = (10 \div 20) R_{AB0}$ sau mai mult, obţinîndu-se randamentul ridicat (care depăşeşte 95%) cu toate că puterea debitată poate să fie de mai multe ori inferioară puterii maxime posibile.

3.18.2. Metoda generatorului echivalent de curent (Teorema lui Norton)

Circuitul electric examinat se împarte ca şi la teorema generatorului echivalent de tensiune în două părţi (vezi Fig. 3.95).

Conform teoremei generatorului echivalent de curent (teorema lui Norton), restul circuitului electric poate fi echivalat printr-o singură sursă de curent (generator de curent) I_{ABsc} şi conductanţa internă G_{AB0}.

Circuitul electric se simplifică şi schema redusă este prezentată în figura 3.101.

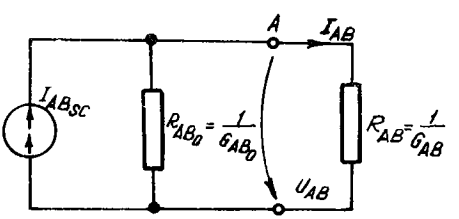


Fig. 3.101. Circuitul electric pentru metoda generatorului echivalent de curent.

Tensiunea U_{AB} de la bornele rezistenţei R_{AB} se calculează cu expresia:

$$U_{AB} = \frac{I_{ABsc}}{G_{AB} + G_{AB0}} \qquad (3.90)$$

Soluţia problemei se obţine plecînd de la determinarea curentului debitat de generatorul de curent I_{ABsc} şi conductanţa internă $G_{AB0} = \frac{1}{R_{AB0}}$.

Conform teoremei lui Norton, curentul I_{ABsc} este egal cu curentul care circulă prin bornele A şi B cînd sînt scurtcircuitate.

Conductanţa internă G_{AB0} a generatorului de curent este inversă rezistenţei interne R_{AB0} şi reprezintă conductanţa echivalentă a circuitului electric în raport cu bornele A şi B (rezistenţa R_{AB} fiind dezlegată atunci cînd circuitul electric este pasivizat (toate sursele sînt presupuse că au tensiuniie electromotoare egale cu zero).

Conductanţa G_{AB}, este inversa rezistenţei R_{AB} prin care trece curentul I_{AB} adică:

$$G_{AB} = \frac{1}{R_{AB}} \tag{3.91}$$

Curentul I_{AB} se determină aplicînd legea lui Ohm.

$$I_{AB} = \frac{U_{AB}}{R_{AB}} \tag{3.92}$$

O consecinţă importantă a teoremelor lui Norton şi Thévenin o constituie echivalarea generatoarelor de curent şi de tensiune.

Un circuit electric poate fi echivalat în raport cu două borne A şi B oarecare ale sale printr-un generator echivalent de tensiune (cu tensiunea electromotoare U_{AB0} - tensiunea de mers în gol a circuitului în raport cu bornele A şi B - şi cu rezistenţa internă R_{AB0} - rezistenţa echivalentă a circuitului pasivizat în raport cu bornele A şi B) sau printr-un generator echivalent de curent (avînd curentul de scurtcircuit I_{ABsc} - curentul de scurtcircuit al circuitului în raport cu bornele A şi B -şi conductanţa echivalentă G_{AB0} a circuitului pasivizat în raport cu bornele A şi B) (Fig. 3.102).

Relaţiile de echivalenţă între generatorul de tensiune şi generatorul de curent sînt:

$$U_{AB0} = R_{AB0} I_{ABsc} \; ; \quad I_{ABsc} = G_{AB0} U_{AB0} \text{ şi } R_{AB0} = \frac{1}{G_{AB0}} \tag{3.93}$$

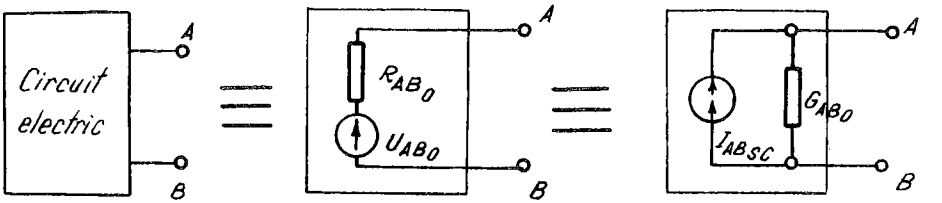


Fig. 3. 102. Echivalarea circuitului electric.

Aplicaţie. Să se determine intensitatea curentului electric prin latura AB, tensiunea la bornele ei şi puterea disipată în ea (Fig. 3. 103).

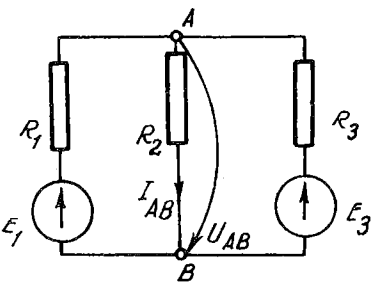


Fig. 3. 103. Circuit electric pentru metoda generatorului echivalent.

Date.

Tensiuni electromotoare:

$$E_1 = 9\ V;\quad E_3 = 14\ V$$

Rezistenţele rezistoarelor:

$$R_1 = 2\ \Omega\ ;\ R_2 = 1\Omega\ ;\ R_3 = 3\ \Omega\ .$$

Necunoscute:

Curentul I_{AB}. Se aplică teoréma lui Norton laturii pasive AB:

$$U_{AB} = \frac{I_{ABsc}}{G_{AB} + G_{AB0}} \quad \text{în care} \quad G_{AB} = \frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{1} = 1\ \Omega^{-1}$$

Se calculează curentul de scurtcircuit între bornele A şi B ($R_{AB} = 0$). Din Fig. 3.104 se constată formarea unui circuit în care curentul de la A la B se calculează ca sumă a curenţilor de scurtcircuit, I_{1sc} şi I_{2sc} generaţi de sursele E_1 şi E_2.

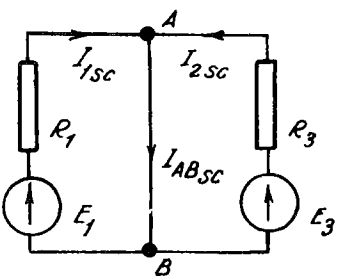


Fig. 3.104. Calculul lui I_{ABsc}.

Avem:

$$I_{ABsc} = I_{1sc} + I_{2sc} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} = \frac{9}{2} + \frac{14}{3} = \frac{55}{6}\ A$$

Conductanţa reţelei pasivizate în raport cu bornele A B la mersul în gol (Fig. 3.105) va fi:

$$C_{AB0} = \frac{1}{R_{AB0}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}\ \Omega^{-1}$$

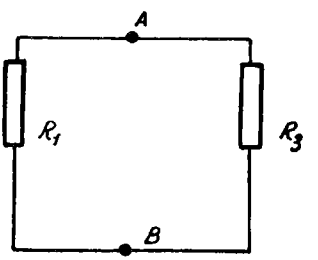


Fig. 3.105. Calculul lui G_{AB0}.

Tensiunea U_{AB} va fi:

$$U_{AB} = \frac{I_{ABsc}}{G_{AB} + G_{AB0}} = \frac{\frac{55}{6}}{1 + \frac{5}{6}} = 5 \text{ V}$$

Curentul prin latura AB va fi:

$$I_{AB} = \frac{U_{AB}}{R_{AB}} = \frac{5}{1} = 5 \text{ A}$$

Puterea disipată în rezistenţa de sarcină R_{AB}:

$$P_{AB} = R_{AB} I_{AB}^2 = 1 \cdot 5^2 = 25 \text{ W}$$

3.19. Circuite neliniare de curent continuu

Un circuit electric de curent continuu este neliniar, cînd conţine cel puţin un element neliniar.

Un element se consideră a fi neliniar atunci cînd curentul care-l străbate variază în funcţie de tensiunea la bornele acestuia, după o curbă (Fig. 3.106 b).

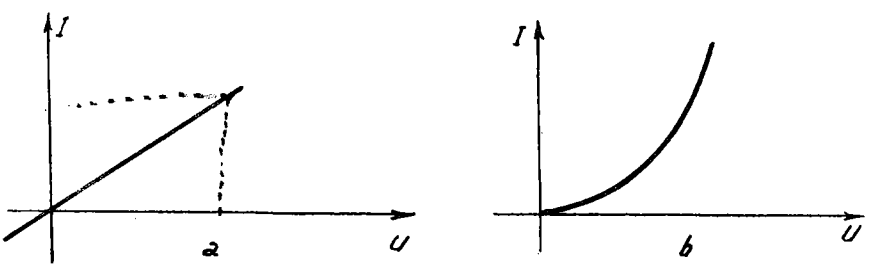


Fig. 3.106. Caracteristici tensiune-curent
a) element liniar; b) element neliniar.

In cazul elementului liniar această dependenţă a curentului în funcţie de tensiunea la borne este o dreaptă (Fig. 3.106 a). Dependenţa curentului în funcţie de tensiune se numeşte caracteristică volt-amper.

In circuitul electric de curent continuu, pot fi elemente neliniare rezistenţele unor elemente care compun circuitul respectiv.

Elementele neliniare se pot grupa în:

- elemente neliniare simetrice pentru care caracteristica volt-amper este aceeaşi pentru ambele sensuri ale curentului;

(ex. lămpile cu incandescenţă); bornele acestor rezistoare nu sînt marcate cu plus şi minus;

- elemente neliniare nesimetrice pentru care această caracteristică diferă de la un sens la altul al curentului prin element; (ex. elemente redresoare, stabilizatoare), bornele sînt marcate cu plus şi minus.

Pentru rezistorul neliniar se definesc două rezistenţe (Fig. 3.107):

rezistenţa statică $R_{st} = \frac{U}{I}$ şi

rezistenţa dinamică $R_d = \frac{\Delta U}{\Delta I}$.

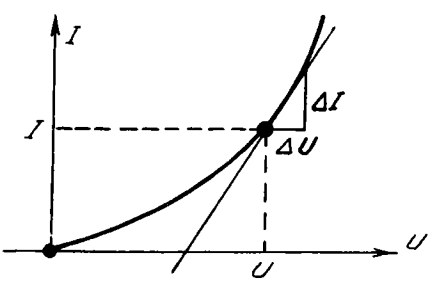


Fig. 3.107. Rezistenţa statică R_{st} şi rezistenţa dinamică R_d.

Rezistoarele neliniare se reprezintă prin simboluri grafice conform Fig. 3.108 .

Pentru a fi determinat un rezistor neliniar trebuie cunoscută caracteristica volt-amper dată grafic, analitic sau sub formă de tabel.

Exemple de elemente cu rezistenţă neliniară sînt prezentate în continuare.

Lămpile cu incandescenţă sînt rezistoare neliniare simetrice. Rezistenţa filamentului se modifică odată cu modificarea temperaturii sale, determi-

nată de curentul care trece prin filament. Caracteristicile volt-amper pentru două lămpi sînt prezentate în Fig. 3.109.

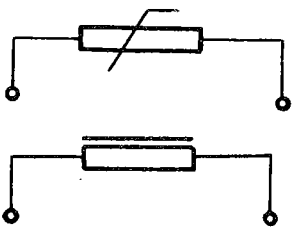


Fig. 3.108. Simboluri grafice pentru rezistoare neliniare.

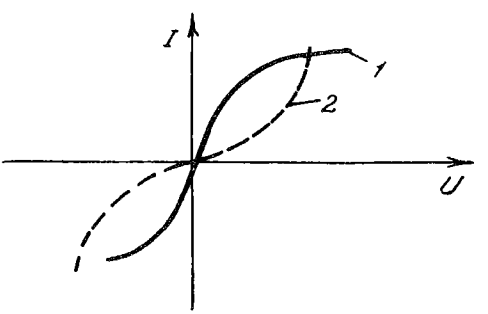


Fig. 109. Caracteristica volt-amper a lămpilor cu incandescenţă.

Caracteristica 1 este pentru lampa cu filament metalic şi indică un coeficient de temperatură pozitiv iar caracteristica 2 este pentru lampa cu filament de cărbune; coeficientul de temperatură este negativ în acest caz.

Termistoarele. Sînt rezistoare neliniare simetrice preparate dintr-un amestec de materiale semiconductoare. Caracteristica volt-amper este prezentată în Fig. 3.110.

In porţiunea A - B, rezistenţa este negativă.

Varistoarele. Sînt rezistoare neliniare simetrice, obţinute din carbură de siliciu şi grafit, presată la temperaturi ridicate. Varistorul are caracteristica volt-amper prezentată în Fig. 3.111.

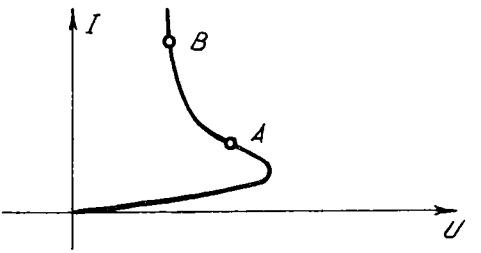


Fig. 3. 110. Caracteristica volt-amper a termistorului.

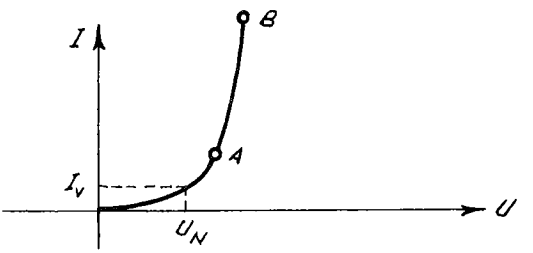


Fig. 3. 111. Caracteristica volt-amper a varistorului.

Se observă o porţiune A - B pentru care tensiunea la borne se păstrează constantă, curentul variind foarte mult.

Varistoarele se utilizează în practică împotriva supratensiunilor (centrale electrice, automatizări etc.).

Intr-un circuit protejat printr-un varistor, la tensiunea nominală curentul este mic prin varistor dar la creşterea tensiunii se ajunge în porţiunea A - B de funcţionare cînd curentul creşte foarte mult însă tensiunea nu mai creşte.

Dioda electronică este un rezistor neliniar cu caracteristică nesimetrică. Se foloseşte în redresarea curenţilor alternativi.

Caracteristica neliniară a diodei electronice poate fi aproximată în porţiunea crescătoare prin relaţia:

$$I = kU^{3/2} \qquad (3.94)$$

Această caracteristică volt-amper este prezentată în Fig.3.112.

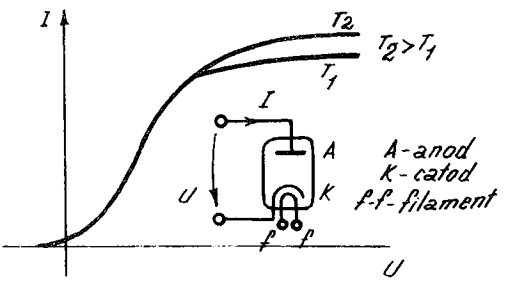


Fig. 3.112. Caracteristica volt-amper a diodei electronice.

La tensiuni ridicate, caracteristica prezintă o zonă de "saturaţie" a curentului. Pentru creşterea curentului în această zonă este necesară încălzirea suplimentară a catodului ($T_2 > T_1$).

Diodele semiconductoare. (din siliciu, germaniu, seleniu etc.)sînt rezistoare neliniare cu caracteristica nesimetrică, folosite la redresarea curenţilor alternativi. Caracteristica volt-amper a diodei semiconductoare este prezentată în Fig.3.113.

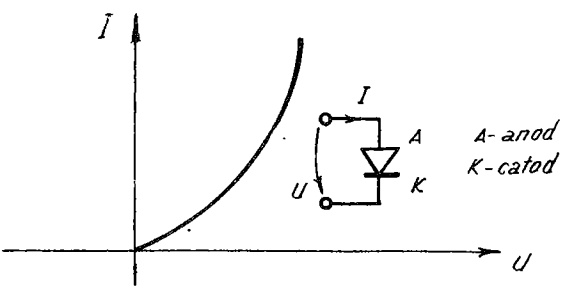


Fig.3.113. Caracteristica volt-amper a diodei semiconductoare

Se construiesc, în momentul de faţă, diode care au o caracteristică aparte, motiv pentru care se utilizează la stabilizarea tensiunii (dioda Zener) sau în tehnica frecvenţelor înalte (dioda tunel).

Caracteristica volt-amper este nesimetrică şi are forma din Fig. 3. 114.

Pentru tensiuni pozitive şi curenti pozitivi, dioda Zener se comportă ca o diodă obişnuită. In acest caz dioda este polarizată direct.

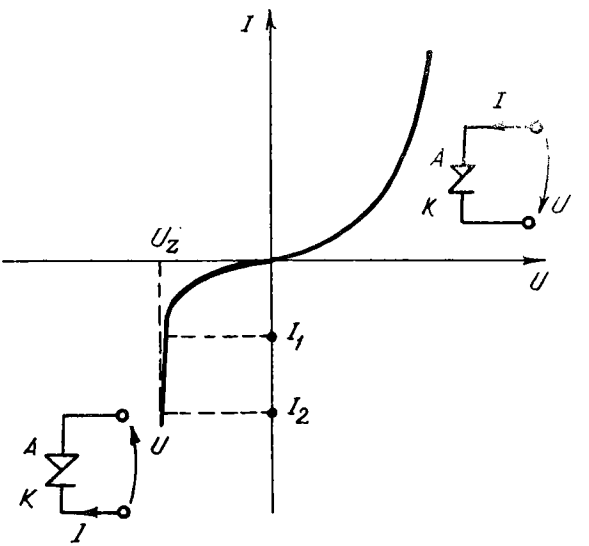


Fig. 3. 114. Caracteristica volt-amper a diodei Zener.

Pentru tensiuni negative şi curenţi negativi, dioda Zener, la o anumită tensiune - U_z - denumită şi tensiune Zener, intră în conducţie, curentul creşte foarte mult, tensiunea rămînînd constantă şi egală cu tensiunea U_z.

Dioda tunel. Caracteristica volt-amper a acestei diode este reprezentată în Fig. 3. 115. Porţiunea de caracteristică A-B prezintă rezistenţă negativă.

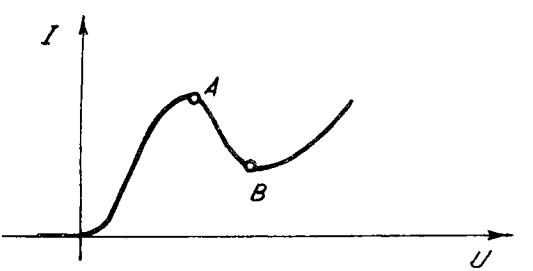


Fig. 3. 115. Caracteristica volt-amper a diodei tunel.

3.19.1. Calculul circuitelor cu elemente neliniare

Calculul circuitelor de curent continuu cu elemente neliniare este mai dificil deoarece aplicînd teorema a doua a lui Kirchhoff, se obţin ecuaţii neliniare. Rezolvarea acestora nu este simplă, cea mai răspîndită metodă fiind metoda grafică.

3.19.2. Legarea în serie a două rezistoare neliniare cu caracteristicile $I = f_1(U_1)$ şi $I = f_2(U_2)$ prezentate în Fig. 3.116 se transformă într-un singur rezistor neliniar cu caracteristica echivalentă $I = f(U)$ după următorul procedeu grafic: pentru ordonate date (curentul care parcurge cele două rezistoare neliniare este acelaşi) se adună abscisele (tensiunile la bornele celor două rezistoare).

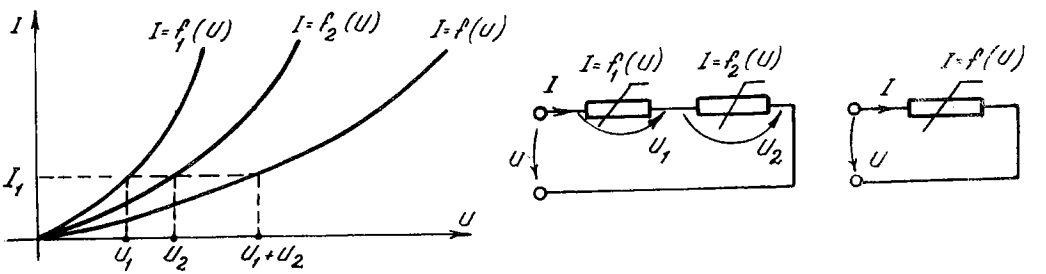


Fig. 3.116. Legarea în serie a două rezistoare neliniare.

In cazul unui circuit neliniar compus dintr-un rezistor neliniar dat prin caracteristica $U_{nel} = f(I)$ şi un rezistor R, se poate folosi de asemenea metoda grafică. In cazul în care tensiunea de alimentare este precizată, de exemplu alimentarea de la o sursă de tensiune electromotoare E (Fig. 3.117), nu mai este necesară determinarea caracteristicii echivalente conectării în serie a celor două rezistoare.

Pentru aceasta se foloseşte altă rezolvare grafică prezentată în Fig. 3.118. Se construieşte caracteristica volt-amper $U_{nel} = f(I)$ a elementului neliniar şi dreapta $U = E - R\,I$ cu punctele de intersecţie E pe dreapta absciselor şi $\frac{E}{R}$ pe dreapta ordonatelor; intersecţia acestei drepte cu caracteristica neliniară $U_{nel} = f(I)$ determină soluţia ecuaţiei (punctul M).

Acest punct se mai numeşte şi punct de funcţionare.

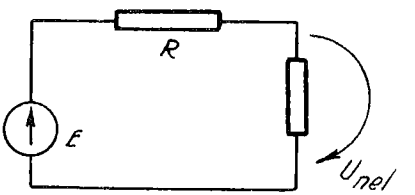


Fig. 3.117. Legarea în serie a unui rezistor liniar cu un rezistor neliniar.

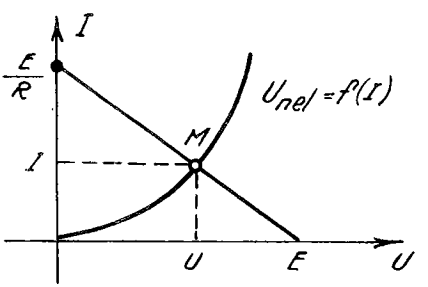


Fig. 3.118. Rezolvarea grafică a circuitului electric (Fig. 3.117).

3.19.3. Legarea în serie a unui rezistor neliniar cu o sursă

Caracteristica volt-amper echivalentă a acestor elemente de circuit este o caracteristică neliniară. Pentru Fig. 3.119 se scrie pe ochiul o teorema a doua a lui Kirchhoff:

$$U = U_{nel} - E \qquad (3.95)$$

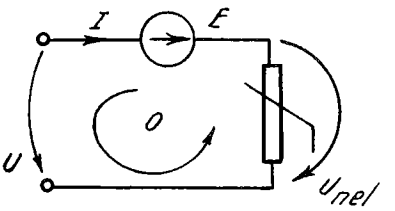


Fig. 3. 119. Legarea în serie a unui rezistor neliniar cu o sursă.

Presupunînd cunoscută caracteristica grafică a elementului neliniar $U_{nel} = f_1(I)$ şi valoarea tensiunii electromotoare a sursei E se poate determina prin construcţie grafică, caracteristica echivalentă a circuitului neliniar. (Fig. 3. 120).

$$U = f_1(I) - E = f_2(I) \qquad (3.96)$$

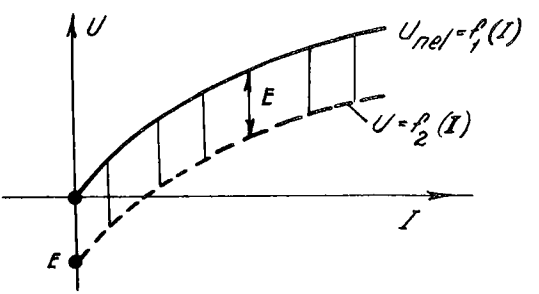


Fig. 3. 120. Caracteristica echivalentă a circuitului neliniar (Fig. 3. 119).

Dacă sursa are sens contrar curentului din circuit, translaţia caracteristicii are loc cu cantitatea +E .

Invers, se poate afirma că orice rezistor neliniar cu o caracteristică ce nu trece prin origine poate fi înlocuit cu un rezistor neliniar avînd caracteristica ce trece prin origine legat în serie cu o sursă.

3.19.4. Echivalarea unui element neliniar cu elemente liniare de circuit

In cazul în care elementul neliniar funcţionează între două limite de tensiune determinate de punctele A şi B (Fig. 3.121), atunci elementul neliniar se poate înlocui printr-un element liniar înseriat cu o sursă. Avantajul acestei echivalări constă în aceea că circuitul se poate rezolva analitic printr-o metodă prezentată anterior.

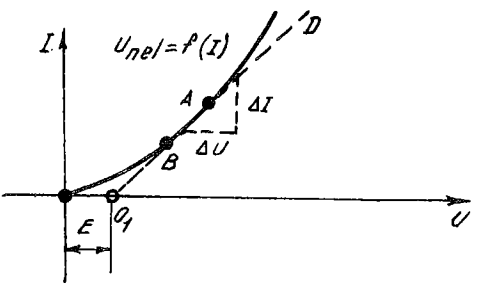


Fig. 3.121. Elementul neliniar funcţionează între A şi B.

Se determină porţiunea caracteristicii neliniare a rezistorului R_{nel} care urmează a fi liniarizată (porţiunea A-B). Prin aceste două puncte se duce dreapta O_1D care reprezintă caracteristica volt-amper a elementului liniar.

Acesta este un rezistor de rezistenţă:

$$R = \frac{\Delta U}{\Delta I}$$

Dar caracteristica nu trece prin origine, astfel că rezistorul poate fi înlocuit cu un rezistor a cărui caracteristică trece prin origine legat în serie cu o sursă de tensiune electromotoare E (Fig. 3.122)

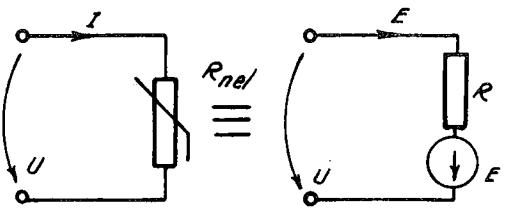


Fig. 3.122. Echivalarea circuitului neliniar cu un circuit liniar.

3-19.5. Legarea în paralel a două rezistoare neliniare cu caracteristicile $I_1 = f_1(U)$ şi $I_2 = f_2(U)$ prezentate în Fig. 3.123 se transformă într-un singur rezistor neliniar cu caracteristica echivalentă $I = f(U)$ după următorul procedeu grafic: pentru abscise date (tensiunea la bornele rezistoarelor neliniare este aceeaşi) se adună ordonatele (curenţii prin cele două rezistoare neliniare) şi se obţine caracteristica $I = f(U)$.

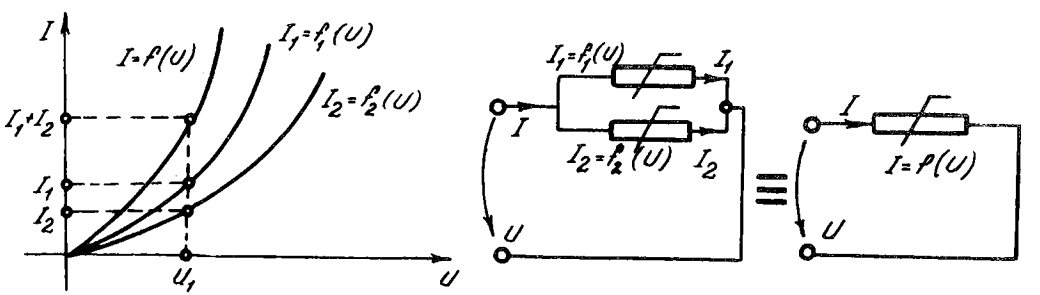


Fig. 3.123. Legarea în paralel a două rezistoare neliniare.

3.19.6. Aplicaţie. Pentru circuitul electric neliniar din Fig. 3.124 se cere:

a) Calculul curentului anodic I_a, tensiunii anodice U_a şi tensiunii la bornele rezistenţei liniare U_R.

b) Inlocuirea elementului neliniar (trioda) cu o porţiune de circuit echivalent liniar şi calcularea curentului I_a cînd tensiunea U_a variază de la 140V la 170 V.

Date:

- Tensiunea electromotoare $E_a = 300V$ şi $E_g = 1V$
- Rezistenţa rezistorului $R_a = 115\ K\Omega$
- Caracteristica volt-amper a triodei pentru tensiune de grilă $E_g = 1V$ (Fig. 3.125) $I_a = f(U_a)$.

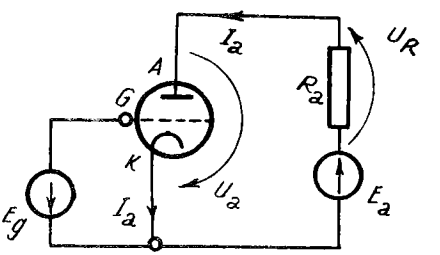


Fig. 3.124. Circuit electric neliniar.

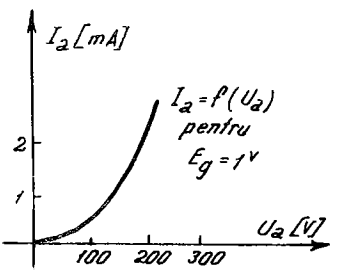


Fig. 3.125. Caracteristica volt-amper a triodei.

Obs. Intre grila G şi catodul K ale triodei este legată sursa de tensiune electromotoare $E_g = 1V$. Această tensiune aplicată determină o anumită caracteristică $I_a = f(U_a)$ prezentată în Fig. 3.125 .

Rezolvare. a) Se înlocuieşte trioda (porţiunea A - K anod-catod) cu un element neliniar R_L.

Se obţine schema echivalentă din Fig. 3.126.

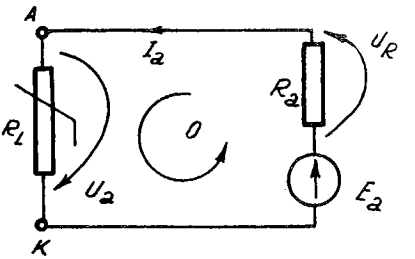


Fig. 3.126. Schema echivalentă a circuitului electric neliniar din Fig. 3.124.

Pe ochiul o, se scrie cu teorema a doua a lui Kirchhoff următoarea ecuaţie:

$$U_a = E_a - R_a I_a \quad \text{sau}$$

$U_a = 300 - 115 \cdot 10^3 \cdot I_a$ care reprezintă ecuaţia dreptei M N din Fig. 3.127.

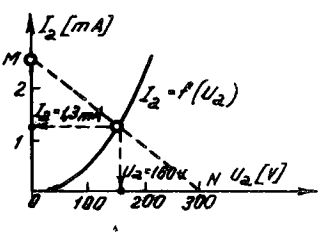


Fig. 3.127. Intersecţia $I_a = f(U_a)$ cu dreapta MN.

Pe acelaşi grafic s-a redesenat caracteristica $I_a = f(U_a)$. Intersecţia acestei caracteristici cu dreapta MN determină soluţia. Se obţine din grafic:

$$I_a = 1,3 \text{ mA}$$

$$U_a = 160 \text{ V}$$

Tensiunea pe rezistenţa R_a rezultă:

$$U_R = E_a - U_a = 300 - 160 = 140\ V$$

b) Pentru determinarea curentului anodic I_a, cînd tensiunea U_a variază de la 140 V la 170 V, se liniarizează caracteristica $I_a = f(U_a)$ pe porţiunea FD (Fig. 3. 128).

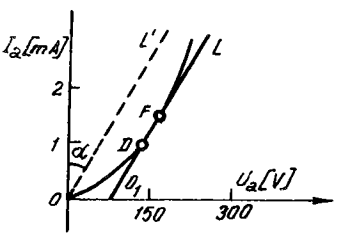


Fig. 3. 128. Liniarizarea caracteristicii $I_a = f(U_a)$ pe porţiunea FD.

Punctul D corespunde tensiunii anodice U_a = 140V iar F, tensiunii anodice U_a = 160 V.

Se uneşte D cu F determinînd dreapta 0_1 L. Aceasta reprezintă caracteristica unui element liniar care pe porţiunea DF se confundă cu caracteristica triodei $I_a = (U_a)$. Prin urmare, numai pentru porţiunea DF, triodei i se poate substitui o porţiune de circuit compusă din elemente liniare. In conformitate cu cele prezentate anterior, aceste elemente liniare sînt: o rezistenţă echivalentă R_e şi o sursă de tensiune electromotoare E_e. Valorile acestora se determină din grafic (Fig. 3. 127) şi este:

$$R_e = \frac{U_a}{I_a} = \frac{120}{2.\ 10^{-3}} = 60\ k\Omega$$

pentru că la o tensiune anodică de U_a = 120 V corespunde un curent anodic I_a = 2 mA (din dreapta OL' paralelă cu OL).

Tensiunea electromotoare E_e se determină din acelaşi grafic şi corespunde segmentului 00_1.

Rezultă: $E_e = 75$ V

Circuitul echivalent liniar este prezentat în Fig. 3.129 cu precizarea că circuitul echivalent este liniar pentru valori ale tensiunii U_a cuprinse între 140 şi 160 V.

Pe ochiul o, se scrie cu teorema a doua a lui Kirchhoff următoarea ecuaţie:

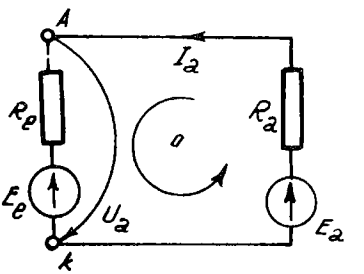


Fig. 3.129. Circuit electric liniar echivalent al circuitului electric din Fig. 3.124.

$$R_e I_a + R_a I_a = E_a - E_e$$

sau

$$I_a = \frac{E_a - E_e}{R_e + R_a} = \frac{300 - 75}{(115 + 60)\,10^3} = 1{,}28 \text{ mA}$$

Rezultatul este foarte apropiat de cel găsit la punctul a) ($I_a = 1{,}3$ mA). Eroarea care este sub 2% provine din cauza că s-a calculat grafic.

CAPITOLUL 4

ELECTRODINAMICA

4.1. Cîmpul magnetic în vid

Cîmpul magnetic, asemănător cîmpului electric, a fost constatat experimental în jurul corpurilor magnetizate şi în jurul conductoarelor parcurse de curent.

Manifestarea cîmpului magnetic se pune în evidenţă prin acţiunile ponderomotoare (forţe şi cupluri) exercitate asupra unor corpuri de probă: mici corpuri magnetizabile (cu proprietăţi magnetice) şi conductoare parcurse de curent. Corpuri magnetizabile sînt unele minereuri de fier, fierul şi aliajele sale, nichelul, cobaltul, anumiţi oxizi metalici etc. Acţiunile ponderomotoare depind de proprietăţile corpului de probă şi de proprietăţile cîmpului magnetic.

Cîmp magnetic s-a dovedit tot experimental că există în regiunea din spaţiu unde există un cîmp electric variabil în timp. Acest cîmp magnetic este deasemenea variabil în timp. In această regiune a spaţiului în care se constată prezenţa simultană a cîmpului magnetic variabil şi a cîmpului electric variabil, spunem că există cîmp electromagnetic.

Deci, cîmpul electric şi cîmpul magnetic reprezintă cazuri particulare ale cîmpului electromagnetic.

Pentru a se înţelege mai bine şi pentru a se reţine mai uşor, se definesc în continuare aceste cîmpuri electrice şi magnetice.

Cîmpul electrostatic este o stare limită a cîmpului electromagnetic corespunzătoare situaţiei în care sarcinile electrice sînt invariabile în timp şi nu se deplasează în raport cu un sistem de referinţă.

Cîmpul electric este o stare limită a cîmpului electromagnetic în care sarcinile electrice sînt invariabile în timp dar se deplasează în raport cu un sistem de referinţă.

Cîmpul magnetostatic este o altă stare limită a cîmpului electromagnetic şi este produs de magneţii permanenţi (minereuri de fier, fierul şi aliajele lui, anumiţi oxizi metalici etc), în stare de repaus. In această stare, mărimile electrice ale cîmpului sînt nule iar cele magnetice sînt invariabile în timp.

Cîmpul magnetic este de asemenea o stare limită a cîmpului electromagnetic dar este produs de mişcarea ordonată a sarcinilor electrice.

Prin urmare, cîmpul magnetic este produs de magneţi permanenţi, curenţi electrici şi de cîmpul electric variabil în timp.

Revenind la explorarea cîmpului magnetic cu ajutorul corpului de probă, trebuie arătat că cel mai potrivit corp de probă este o mică spiră foarte subţire parcursă de curent, numită buclă de curent (Fig. 4.1).

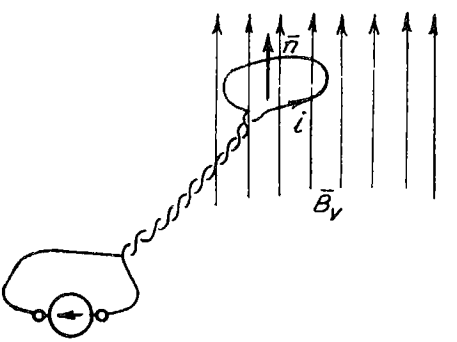


Fig. 4.1. Buclă de curent.

Dacă se aduce această buclă de curent în regiunea în care se presupune că există cîmp magnetic, se constată că asupra ei se exercită o acţiune de natură mecanică, un cuplu de forţe C.

Tot din experienţă se deduce că acest cuplu are următoarea expresie vectorială: $\bar{C} = \bar{m}_b \times \bar{B}_v$, (4.1)

în care:

$\bar{m}_b$ reprezintă momentul magnetic al buclei şi caracterizează corpul de probă (bucla) din punct de vedere magnetic. La rîndul său, acest moment magnetic este dat de relaţia:

$$\bar{m}_b = i\, A\, \bar{n} \text{ sau scalar } m_b = iA, \qquad (4.2)$$

în care:

i reprezintă curentul care străbate bucla;

A - aria buclei;

n - vectorul normal la aria buclei A (v. Fig. 4.1.).

Rezultă că momentul magnetic al buclei de curent este o mărime care se poate exprima prin mărimi cunoscute.

Unitatea de măsură - după cum rezultă din relaţia de mai sus-este 1 amper - metru pătrat ($1\ Am^2$) în SI.

B_v reprezintă inducţia magnetică în vid.

Unitatea de măsură în SI este 1 tes la (1 T). Rezultă:

$$[B_v] = \frac{[C]}{[i][A]} = \frac{1\ N \cdot 1\ m}{1\ A \cdot 1\ m^2} = \frac{1\ N}{1\ A\ 1\ m} = 1\ T \qquad (4.3)$$

4.1.1. Linia de cîmp magnetic. Dacă se explorează toate punctele regiunii şi se determină astfel cîmpul magnetic de inducţie B_v, se pot imagina linii care au proprietatea că tangenta lor în orice punct au direcţia şi sensul vectorului inducţiei magnetice $\bar{B}_v$. Ansamblul acestor linii de cîmp magnetic formează spectrul cîmpului magnetic.

Ca exemplu, se prezintă în Fig. 4.2 spectrul cîmpului magnetic produs de curentul electric dintr-un conductor rectiliniu. In Fig. 4.3, se reprezintă spectrul cîmpului magnetic produs de curentul care străbate o bobină.

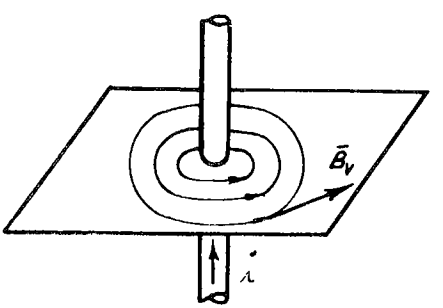


Fig. 4.2. Spectrul cîmpului magnetic produs de un conductor produs de curentul i.

Sensul liniilor de cîmp magnetic este asociat cu sensul curentului care produce cîmpul magnetic după regula burghiului drept.

Spre deosebire de liniile cîmpului electric care plecau de la sarcina negativă şi soseau la sarcina pozitivă, liniile cîmpului magnetic sînt linii închise, nu au început şi nu au sfîrşit. Din acest motiv cîmpul magnetic este un cîmp solenoidal.

Cîmpul magnetic se numeşte uniform sau omogen într-o anumită regiune din spaţiu dacă inducţia sa magnetică este aceeaşi în fiecare punct din regiunea considerată, adică vectorul $\vec{B}_v$ are în toate punctele aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi aceeaşi mărime.

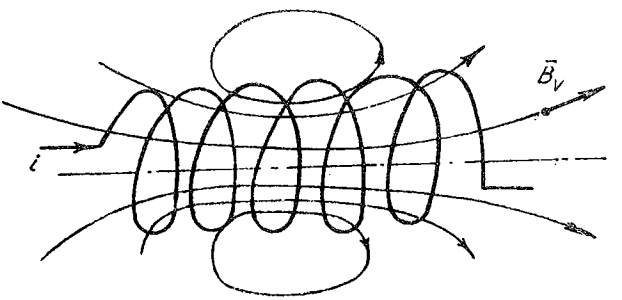


Fig. 4.3. Spectrul cîmpului magnetic produs de o bobină parcursă de curentul i.

4.1.2. Fluxul magnetic

Se consideră o suprafaţă S străbătută de un cîmp magnetic de inducţie $\vec{B}_v$ (Fig. 4.4).

Se defineşte fluxul magnetic sau fluxul inducţiei magnetice în vid $\vec{B}_v$ prin suprafaţa S produsul:

$$\Phi_S = B_v A_S \tag{4.4}$$

în care s-a notat:

Φ_s - fluxul magnetic ;

B_v - inducţia magnetică în vid;

A_s - aria suprafeţei S.

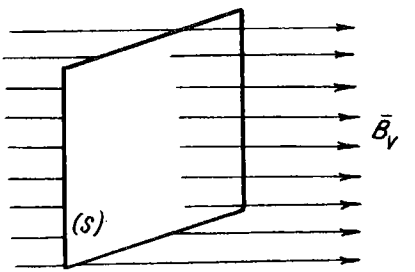


Fig. 4.4. Suprafaţă străbătută de $\bar{B}_v$.

In cazul în care direcţia vectorului inducţiei B_v formează un unghi α cu normala la suprafaţa S, atunci fluxul magnetic Φ_s are expresia:

$$\Phi_s = B_v A_s \cos \alpha \tag{4.5}$$

Dacă suprafaţa S este o suprafaţă închisă, atunci fluxul magnetic este nul, adică:

$$\Phi_\Sigma = 0 \ . \tag{4.6}$$

S-a notat suprafaţa închisă cu litera grecească Σ (sigma).

Demonstraţia se face în cazul unui paralelipiped cu axa paralelă liniilor de cîmp magnetic, respectiva vectorului inducţiei magnetice $\bar{B}_v$ (Fig. 4.5).

Fluxul total prin suprafaţa Σ reprezintă suma fluxurilor de pe feţele laterale şi frontale adică:

$$\Phi_\Sigma = \Phi_{s\,lat} + \Phi_{sf1} + \Phi_{sf2} =$$

$$0 - B_v S_{f1} + B_v S_{f2} = 0 \tag{4.7}$$

$\Phi_{lat} = B_v S_{lat} \cos \alpha_1 = B_v S_{lat} \cos \frac{\pi}{2} = 0$ deoarece unghiul α_1

dintre normala suprafeţei laterale şi vectorul B_v este $\frac{\pi}{2}$.

$$\phi_{sf1} = B_v S_{f1} \cos \alpha_2 = B_v S_{f1} \cos \pi = - B_v S_{f1}$$

şi

$$\phi_{sf2} = B_v S_{f2} \cos \alpha_3 = B_v S_{f1} \cos 0^o = B_v S_{f2}$$

deoarece normala la suprafaţa S_{f1} face unghiul $\alpha_2 = \pi$ cu $\bar{B}_v$ şi vectorul $\bar{B}_v$ "intră" în suprafaţa S_{f1} iar normala la suprafaţa S_{f2} face un unghi $\alpha_3 = 0^o$ cu B_v (vectorul $\bar{B}_v$ "iese" din suprafaţa S_{f2}).

Dar $S_{f1} = S_{f2}$. Deci $\Phi_\Sigma = 0$.

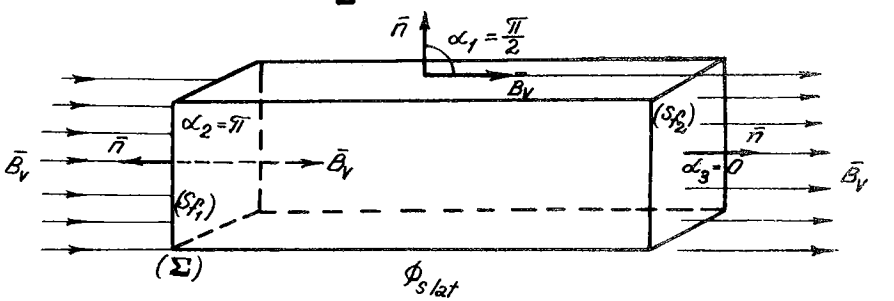


Fig. 4.5. Paralelipiped parcurs de $\bar{B}_v$.

Unitatea de măsură a fluxului magnetic în sistemul internaţional SI se numeşte Weber (1Wb).

$$1Wb = 1\ T \cdot 1\ m^2 \qquad (4.8)$$

4.2. Forţe în cîmp magnetic

4.2.1. Forţa lui Lorentz. (Forţa magnetică)

Tot prin experienţă s-a constatat că asupra corpului de probă încărcat cu sarcină electrică q, aflat în mişcare cu viteza $\bar{v}$ într-un cîmp magnetic, se exercită o forţă deosebită de forţa gravitaţională, mecanică sau electrică. For-

ţa aceasta este de natură magnetică şi se exprimă printr-o relaţie vectorială stabilită de Hendrik Antoon Lorentz - fizician olandez (1853 - 1928). Expresia este

$$\bar{F}_m = q\bar{v} \times \bar{B}_v \quad \text{în care:} \tag{4.9}$$

$\bar{F}_m$ - forţa magnetică;

q - sarcina corpului de probă;

$\bar{v}$ - viteza corpului de probă;

$\bar{B}_v$ - inducţia magnetică a cîmpului magnetic.

Forţa magnetică $\bar{F}_m$, care se mai numeşte " forţa Lorentz", este rezultat al produsului vectorial dintre viteza $\bar{v}$ şi inducţia magnetică în vid $\bar{B}_v$; îndeplineşte următoarele:

- este perpendiculară pe planul determinat de vectorii $\bar{v}$ şi $\bar{B}_v$;

- sensul forţei se asociază după regula burghiului drept; conform acestei reguli, se roteşte primul vector $\bar{v}$ pînă se suprapune ca orientare peste cel de al doilea vector $\bar{B}_v$ pe drumul cel mai scurt: burghiul va înainta după sensul forţei $\bar{F}_m$ (Fig. 4.6); pentru sarcină negativă adică $q < 0$, sensul forţei este opus (Fig. 4.7);

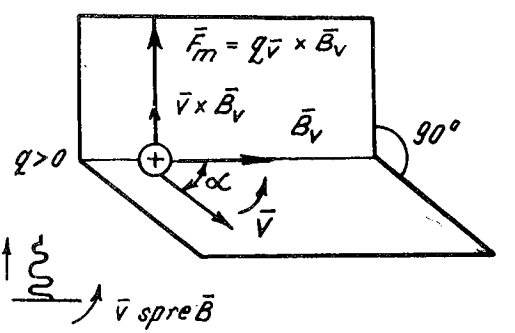


Fig. 4.6. Forţa Lorentz ($\bar{F}_m$) are sensul de înaintare al burghiului ($q > 0$).

- modulul forţei este:

$$F_m = |q| \quad v \; B_v \sin \alpha \tag{4.10}$$

unde α este unghiul dintre $\bar{v}$ şi $\bar{B}_v$ (Fig. 4.6 şi 4.7);

- forţa este maximă pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (vectorii $\bar{v}$ şi $\bar{B}_v$ sînt perpendiculari între ei):

$$F_{m\ max} = |q|\ v\ B_v \sin\frac{\pi}{2} = |q|\ v\ B_v; \qquad (4.11)$$

- forţa este nulă pentru $\alpha = 0$ (vectorii $\bar{v}$ şi $\bar{B}$ sînt paraleli între ei):

$$F_{m\ min} = |q|\ v\ B_v \sin 0^\circ = 0\ . \qquad (4.12)$$

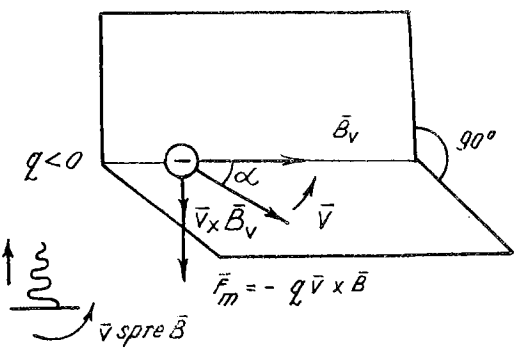


Fig. 4.7. Forţa Lorentz ($\bar{F}_m$) este opusă sensului de înaintare al burghiului ($q < 0$).

Aplicaţie. Un electron cu masa $m_o = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg şi sarcina electrică $q_e = 1,6 \cdot 10^{-19}$C pătrunde într-un cîmp magnetic uniform de inducţie $B_v = 1$T, cu viteza $v = 10^5$ m/s. Viteza $\bar{v}$ este perpendiculară pe $\bar{B}_v$.

Se cere:

- Forţa lui Lorentz exercitată asupra electronului;
- Traiectoria electronului în cîmpul magnetic.

Conform expresiei (4.11) forţa lui Lorentz este:

$$F_m = q_e\ v\ B_v \sin\frac{\pi}{2} = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 1 = 1,6 \cdot 10^{-14}\text{N}$$

Din legea fundamentală a dinamicii

$$\bar{F} = m \cdot \bar{a}$$

rezultă în acest caz:

$$\bar{a} = \frac{\bar{F}_m}{m_o} = \frac{q_e}{m_o} \bar{v} \times \bar{B} .$$

Prin urmare, acceleraţia este normală pe viteză şi modulul constant:

$$a = \frac{|q_e|}{m_o} v \quad B = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}} \cdot 10^5 \cdot 1 = 1,76 \cdot 10^{16} m/s^2 .$$

Dacă acceleraţia este constantă în modul şi este perpendiculară pe viteză, atunci mişcarea este circulară uniformă:

$$a = a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{|q_e| v B}{m_o} = r\omega^2$$

Prin urmare, traiectoria este un cerc de rază

$$r = \frac{m_o v}{|q_e| B} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^5}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1} = 5,68 \cdot 10^{-7} m$$

şi viteza unghiulară

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{10^5}{5,68 \cdot 10^{-7}} = 1,76 \cdot 10^{11} \frac{rad}{s} .$$

4.2.2. Forţa lui Laplace (Forţa electromagnetică)

Dacă într-un cîmp magnetic se introduc conductoare parcurse de curenţi, se constată apariţia unor forţe de natură magnetică ce se exercită asupra acestor conductoare. Ca urmare, conductoarele se deplasează în cîmp magnetic.

Fizicianul şi matematicianul francez Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827) a formulat expresia acestei forţe de natură magnetică $\bar{F}_L$ ce se exercită asupra unui segment rectiliniu de conductor parcurs de curent;

$$F_L = i \bar{l} \times \bar{B}_v \qquad (4.13)$$

în care:

i - intensitatea curentului electric care străbate conductorul;

$\bar{l}$ - lungimea segmentului de conductor orientată în sensul curentului (Fig. 4.8).

$\bar{B}_v$ - inducţia magnetică în vid a unui cîmp uniform.

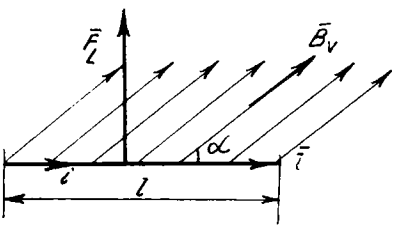


Fig. 4.8. Forţa F_L (Forţa Laplace)

Acestei forţe i s-a spus electromagnetică sau "forţă Laplace" şi este rezultatul produsului vectorial dintre segmentul de conductor orientat parcurs de curent $i\bar{l}$ şi inducţia magnetică în vid $\bar{B}_v$. Indeplineşte următoarele condiţii:

- este perpendiculară pe planul determinat de vectorii $\bar{l}$ şi $\bar{B}_v$;
- sensul forţei se asociază după regula burghiului drept;
- modulul forţei este

$$F_L = iB_v l \sin\alpha \qquad (4.14)$$

unde α este unghiul dintre $\bar{l}$ şi $\bar{B}_v$(Fig. 4.8);

- este maximă pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (vectorii $\bar{l}$ şi $\bar{B}_v$ sînt perpendiculari între ei)

$$F_{L\,max} = i\,B_v \ell \sin\frac{\pi}{2} = i\,B_v\,l\ ; \qquad (4.14\ a)$$

- este nulă pentru $\alpha = 0$ (vectorii $\bar{l}$ şi $\bar{B}_v$ sînt paraleli între ei)

$$F_{L\,min} = i\,l\,B_v \quad \sin 0^\circ = 0\ ; \qquad (4.14\ b)$$

4.2.3. Forţa lui Ampère (Forţa electrodinamică)

Dacă într-un cîmp magnetic creat în jurul unui conductor parcurs de curent, se introduce paralel un alt conductor parcurs de curent, se constată apariţia unei forţe de natură magnetică ce se exercită între aceste conductoare (Fig. 4. 9).

Prima dată, această observaţie a fost făcută de fizicianul francez André Marie Ampère (1775 - 1836) şi a determinat următoarea expresie a forţei:

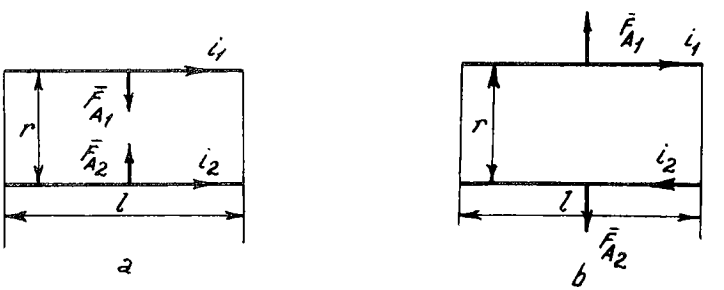


Fig. 4. 9. Forţa lui Ampère (F_A).
a) Conductoarele se atrag; b) conductoarele se resping.

$$F_A = \frac{\mu_o}{2\pi} \cdot \frac{i_1 \; i_2}{r} \; l \qquad (4.15)$$

în care:

i_1 şi i_2 reprezintă curenţii care străbat conductoarele 1 şi 2;

l - lungimea segmentelor conductoarelor 1 şi 2 pe care se calculează forţa;

r - distanţa între cele două conductoare paralele 1 şi 2;

μ_o - constantă universală, numită permeabilitatea absolută a vidului. In sistemul internaţional S I este egală cu:

$$\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ henry / metru.}$$

Unitatea de măsură henry se va explica ulterior ; μ_o se mai numeşte constanta magnetică absolută a vidului.

Această forţă care se numeşte electrodinamică sau "forţa lui Ampere" îndeplineşte condiţiile:

- este de atracţie şi pozitivă cînd $i_1 \, i_2 > 0$;
- este de respingere şi negativă cînd $i_1 \, i_2 < 0$.

O altă formulare este următoarea:

Conductoarele parcurse de curenţi de acelaşi sens se atrag (Fig. 4. 9 a) şi de sens contrar se resping (Fig. 4. 9 b)

Forţa lui Ampère a permis definirea unităţii de intensitate de curent numită amper şi notată cu litera A.

Pentru $\mu_o = 4 \pi \, 10^{-7}$ H/m

$i_1 = i_2 = 1$ A

$l = 1$ m

şi $r = 2$ m (distanţa între conductoare) se obţine

$$F_A = \frac{4 \pi \cdot 10^{-7}}{2 \pi} \cdot \frac{1^2 \, 1}{2} = 10^{-7} \text{ N}$$

astfel că amperul se poate defini astfel:

Amperul este intensitatea curentului din fiecare conductor al unei perechi de conductoare paralele situate în vid la distanţa de 2 m, atunci cînd asupra fiecărui metru de lungime a fiecărui conductor se exercită forţa de 10^{-7} N.

Multiplii şi submultiplii amperului, folosiţi în electrotehnică sînt:

$1 \text{ kA} = 10^{-3}$ A (kiloamper)

$1 \text{ mA} = 10^{-3}$ A (miliamper)

$1 \, \mu\text{A} = 10^{-6}$ A (microamper)

Aplicaţie. Să se calculeze forţa lui Ampère ce se exercită între două conductoare paralele de lungime $l = 1{,}5$ m, situate în vid la distanţa $r = 0{,}5$m, parcurse de curenţi avînd intensităţile : $i_1 = i_2 = 10.000$ A.

$$F_A = \frac{\mu_o}{2 \pi} \, i_1 \, i_2 \, \frac{l}{r} = \frac{4 \pi \cdot 10^{-7}}{2 \pi} (10^4)^2 \, \frac{1{,}5}{0{,}5} = 60 \text{ N}.$$

4.3. Formula lui Biot - Savart

Prin experienţă, Biot şi Savart au stabilit o formulă pentru calculul inducţiei magnetice în vid B_v produsă de un circuit filiform parcurs de curentul continuu i. Pentru conductorul filiform şi rectiliniu, inducţia magnetică în vid B_v la distanţa r este exprimată prin formula lui Biot - Savart:

$$B_v = \frac{\mu_o i}{2\pi r} \tag{4.16}$$

Formula se poate deduce şi din expresiile forţei lui Ampère şi forţei Laplace.

Forţa lui Ampère se interpretează şi în modul următor: fiecare dintre cele două conductoare produce în jurul său un cîmp magnetic care exercită o forţă asupra celuilalt conductor (Fig. 4.10).

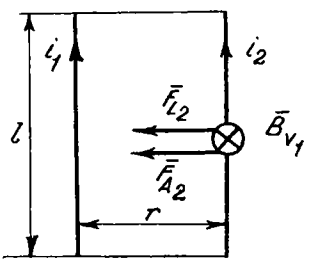


Fig. 4.10. Forţele $\bar{F}_{L2}$ şi $\bar{F}_{A2}$ exercitate de conductorul 1 asupra conductorului 2.

Dacă forţa lui Ampère $\bar{F}_{A2}$, exercitată de conductorul 1 asupra conductorului 2, se interpretează ca fiind forţa Laplace F_{L2}, rezultată din acţiunea cîmpului magnetic al conductorului 1 asupra conductorului 2, atunci se poate scrie în modul:

$$F_{A2} = F_{L2} \text{ sau}$$

$$\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{r} l = B_{v1} i_2 l$$

respectiv $$B_{v1} = \frac{\mu_o i_1}{2\pi r}$$

şi pentru un conductor oarecare filiform şi rectiliniu,

$$B_v = \frac{\mu_o i}{2\pi r} \quad \text{(identică cu relaţia 4.16).}$$

Din expresia vectorială a forţei Laplace, s-a văzut că această forţă este perpendiculară pe planul determinat de conductor şi de inducţia magnetică în vid $\bar{B}_v$, rezultînd deci că vectorul $\bar{B}_v$ este tangent la cercul de rază r, centrul cercului fiind plasat pe axa conductorului 1.

Prin urmare, liniile de cîmp magnetic ale unui conductor rectiliniu şi infinit de lung sînt cercuri concentrice cu centrul pe conductor (Fig. 4.11).

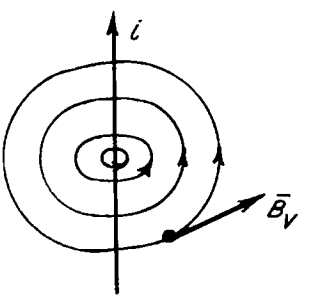


Fig. 4.11. Liniile de cîmp magnetic sînt concentrice cu centrul conductorului.

Sensul vectorului $\bar{B}_v$ se asociază cu sensul curentului după regula burghiului drept.

4.4. Intensitatea cîmpului magnetic

Intensitatea cîmpului magnetic în vid $\bar{H}_v$ se defineşte ca raportul dintre inducţia magnetică în vid $\bar{B}_v$ şi permeabilitatea vidului μ_o

$$\bar{H}_v = \frac{\bar{B}_v}{\mu_o} . \qquad (4.17)$$

Unitatea de măsură a intensităţii cîmpului magnetic în sistemul internaţional SI este 1 amper/metru $(1\ A/m)$.

Aplicaţie. Să se calculeze intensitatea cîmpului magnetic produs de un conductor rectiliniu parcurs de curentul $i = 6,28$ A la distanţa $r = 1$ m de axa sa.

$$H = \frac{i}{2\pi r} = \frac{6,28}{2\pi 1} = 1\ A/m$$

4.5. Tensiunea magnetomotoare. Solenaţia

Se consideră un cîmp magnetic uniform de inducţie $\bar{B}_v$ şi intensitatea cîmpului magnetic $\bar{H}_v$ (Fig. 4.12).

In interiorul cîmpului între două puncte A şi B se consideră drumul rectiliniu orientat $\bar{l}_{AB}$.

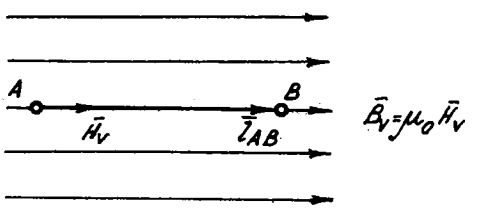


Fig. 4.12. Cîmp magnetic uniform $\bar{H}_v$.

Se numeşte tensiune magnetică asociată unui drum rectiliniu l_{AB} mărimea

$$U_{mAB} = H_v\, l_{AB} \tag{4.18}$$

Dacă se consideră drumul l_{AB} înclinat sub un unghiu α faţă de liniile de cîmp (Fig. 4.13), atunci tensiunea magnetică

$$U_{mAB} = H_v\, l_{AB} \cos \alpha. \tag{4.19}$$

Tensiunea magnetică este o mărime algebrică al cărei sens de calcul este cel al vectorului $\bar{l}_{AB}$. Astfel:

$$Um_{AB} = H_v\, l_{AB} \cos\alpha = \begin{cases} Hl_{AB} & \text{dacă } \alpha = 0 \\ 0 & \text{dacă } \alpha = \frac{\pi}{2} \\ -Hl_{AB} & \text{dacă } \alpha = \pi \end{cases} \qquad (4.20)$$

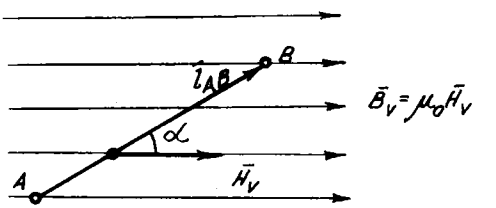


Fig. 4. 13. Liniile de cîmp magnetic $\bar{H}_v$, înclinate sub unghiul α.

Unitatea de măsură pentru tensiunea magnetică în sistemul internațional SI este 1 amper (1 A)..

Din

$$H_v\, l = U_m \quad \text{avem}$$

$$1 \text{ A/m} \times 1 \text{ m} = 1 \text{ A}.$$

Tensiunea magnetică se numeşte tensiune magnetomotoare dacă drumul pe care se calculează este un drum închis; se notează cu U_{mm}.

Solenaţie. Se numeşte solenaţie suma algebrică a curenţilor înconjuraţi de o curbă închisă (Fig. 4. 14).

Intre tensiunea magnetomotoare U_{mm} şi solenaţie există o relaţie determinată prima dată de Ampère, cu următorul enunţ: tensiunea magnetomotoare pe orice drum închis este egală cu suma algebrică a intensităţilor curenţilor din conductoarele înconjurate de drumul închis:

$$U_{mm} = \Sigma i_k \,. \qquad (4.21)$$

Pentru N conductoare străbătute de curentul i

$$U_{mm} = Ni \ . \qquad (4.21\ a)$$

Relaţia stabilită de Ampère, cunoscută şi sub numele de teorema lui Ampère, este adevărată în curent continuu .

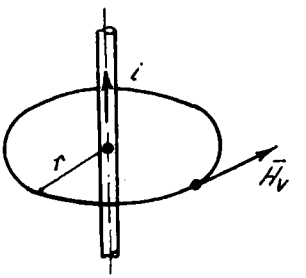


Fig. 4. 14. Solenaţia din interiorul curbei închise este curentul i.

In cazul în care curenţii înconjuraţi de drumul închis sînt variabili, egalitatea nu mai este adevărată.

Aplicaţia 1. Să se calculeze intensitatea cîmpului magnetic în vid produs de un conductor filiform, rectiliniu, parcurs de curentul i, într-un punct aflat la distanţa d de conductorul respectiv (Fig. 4. 15).

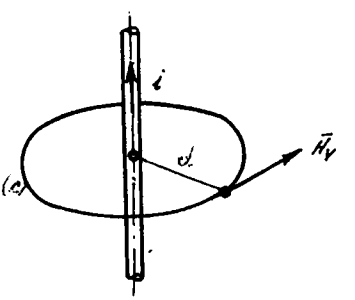


Fig. 4. 15. Intensitatea cîmpului magnetic la distanţa d.

Rezolvare.

Se consideră conturul închis de forma unui cerc (c), aflat într-un plan perpendicular pe conductor şi concentric cu axa conductorului. Din teorema lui Ampère avem:

$$U_{mm} = Ni$$

Cum în cazul acesta numărul conductoarelor parcurse de curenţi este N = 1 şi cum tensiunea magnetomotoare $U_{mm} = H_v l_c$ în care l_c este drumul închis, respectiv lungimea cercului:

$$l_c = 2 \pi d$$

rezultă

$$H_v 2 \pi d = i$$

sau

$$H_v = \frac{i}{2 \pi d}$$

Intensitatea cîmpului magnetic H_v este în orice punct tangent la cerc şi de modul constant.

Aplicaţia 2. Să se calculeze intensitatea cîmpului magnetic în vid produsă de un solenoid foarte lung de lungime l format din N spire parcurse de curentul i (Fig. 4.16).

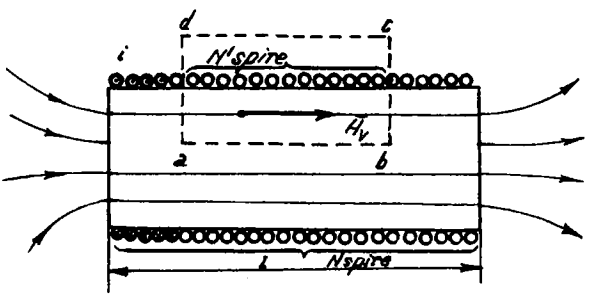


Fig. 4.16. Cîmpul magnetic produs de solenoid.

Experimental se constată că în interiorul solenoidului cîmpul este uniform adică intensitatea cîmpului magnetic în vid $\bar{H}_v$ şi inducţia magnetică în vid $\bar{B}_v$ sînt orientate în lungul axei solenoidului. In exteriorul solenoidului se constată tot experimental că nu există cîmp magnetic.

Aplicînd teorema lui Ampère pe drumul închis a, b, c, d, a (perimetrul unui dreptunghi) care cuprinde N'spire, rezultă:

$$U_{mm} = H_v\, l_{ab} \cos 0^o + H_v\, l_{bc} \cos \frac{\pi}{2} + 0\, l_{cd} + H_v\, l_{da} \cos \frac{\pi}{2} = H_v\, l_{ab}$$

sau $N'i = H_v\, l_{ab}$.

Pentru $l_{ab} = l$ avem şi $N' = N$.

Rezultă $U_{mm} = H_v\, l$

şi $U_{mm} = Ni$ în care Ni reprezintă solenaţia solenoidului.

Rezultă $H_v\, l = Ni$

sau $H_v = \frac{Ni}{l}$.

Dacă N = 1.000 spire, l = 0,5 m şi i = 2 A rezultă:

$$H_v = \frac{1.000 \cdot 2}{0,5} = 4.000 \text{ A/m}.$$

4.6. Cîmpul magnetic în corpuri

Experimental se constată că atunci cînd circuitul filiform parcurs de curentul continuu i este plasat într-o substanţă (nu mai este plasat în vid) inducţia magnetică capătă altă valoare. Schimbarea inducţiei magnetice în prezenţa substanţei sau corpurilor este o consecinţă a orientării curenţilor moleculari ai corpului în prezenţa cîmpului magnetic exterior.

Curenţii moleculari, reprezintă o ipoteză a fizicianului francez Ampère, conform căreia corpurile plasate într-un cîmp magnetic capătă o stare de magnetizare proprie (generează cîmp magnetic) ca urmare a acestor curenţi mole-

culari sau curenţi legaţi. Aceştia sînt determinaţi de mişcarea la scară microscopică a electronilor din jurul moleculelor sau atomilor.

In natură există o categorie de corpuri la care curenţii moleculari, sub acţiunea unui cîmp magnetic exterior, se ordonează în aşa mod în cît intensifică cîmpul magnetic rezultant. Corpurile se numesc paramagnetice şi sînt: oxigenul, aluminiul, platina etc.

Există altă categorie de corpuri, care se numesc diamagnetice, la care orientarea curenţilor moleculari este de aşa natură încît slăbesc cîmpul magnetic rezultant. Corpuri cu astfel de proprietate sînt: cupru, argint, bismut, apă etc.

O categorie specială, o constituie corpurile feromagnetice (fier, nichel, cobalt) care se magnetizează foarte puternic în prezenţa unui cîmp magnetic exterior şi care pot să-şi păstreze starea de magnetizare şi în absenţa acestui cîmp.

4.6.1. Magnetizarea temporară şi permanentă.

Din antichitate, s-au descoperit în Asia mică anumiţi oxizi de fier care au proprietatea de a produce cîmp magnetic în jurul lor. Se spune despre aceste corpuri că au o stare de magnetizare permanentă sau că sînt magneţi permanenţi. Magneţii permanenţi pot fi produşi în mod artificial prin introducerea materialelor feromagnetice într-un cîmp magnetic.

Un corp este magnetizat sau posedă o stare de magnetizare dacă asupra lui acţionează forţe sau cupluri cînd este introdus într-un cîmp magnetic.

Starea de magnetizare este de două tipuri: magnetizare permanentă şi magnetizare temporară.

Magnetizarea permanentă nu este condiţionată de prezenţa unui cîmp magnetic exterior, aceasta există şi în absenţa cîmpului magnetic.

Magnetizarea temporară există numai în prezenţa unui cîmp magnetic exterior: în absenţa acestui cîmp, corpul nu este magnetizat.

Pentru a caracteriza starea de magnetizare a unui corp s-a introdus o mărime vectorială denumită moment magnetic. Se notează cu $\bar{m}$.

Momentul magnetic $\bar{m}$ poate fi compus din suma a două momente magnetice, unul corespunzător magnetizării permanente $\bar{m}_p$ şi altul corespunzător magnetizării temporare $\bar{m}_t$;

$$\bar{m} = \bar{m}_p + \bar{m}_t \qquad (4.22)$$

în care: $\bar{m}$ - momentul magnetic;

$\bar{m}_p$ - momentul magnetic permanent:

$\bar{m}_t$ - momentul magnetic temporar.

Dacă se introduce într-un cîmp magnetic de inducţie B_v un mic corp magnetizat de moment $\bar{m}$, asupra corpului se va exercita o forţă şi un cuplu (Fig. 4.17).

Expresia matematică a forţei fiind mai complicată nu o prezentăm aici. expresia cuplului care ia naştere are însă forma:

$$\bar{C} = \bar{m} \times \bar{B}_v \,. \qquad (4.23)$$

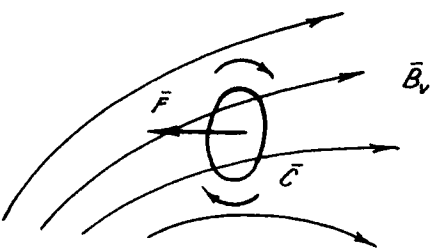


Fig. 4.17. Asupra corpului se exercită o forţă şi un cuplu.

Unitatea de măsură rezultă din relaţia (4.23):

$$\text{în} = \frac{[C]}{[B_v]} = \frac{[F]\ [L]}{[B_v]} = \frac{[I][L][B_v]\ [L]}{[B_v]} = [I]\,[L]^2 \qquad (4.23\ a)$$

Rezultă că în sistemul S I unitatea de măsură pentru momentul magnetic este amper-metru pătrat (1 Am^2).

In cazul unui corp de dimensiuni mari, apare un moment magnetic rezultant ca reprezentînd suma vectorială a momentelor magnetice ale micilor corpuri $\bar{m}$. Notăm această sumă cu $\Delta \bar{m}$.

Dacă se face raportul dintre suma vectorială a momentelor magnetice $\Delta \bar{m}$ şi volumul ΔV, se obţine o nouă mărime analoagă cu densitatea de volum a corpului. Această mărime se numeşte intensitatea de magnetizare sau magnetizaţie.

Se notează cu $\bar{M}$ şi este egală cu:

$$\bar{M} = \frac{\Delta \bar{m}}{\Delta V} \tag{4.24}$$

Rezultă că unitatea de măsură a magnetizaţiei $\bar{M}$ este în sistemul internaţional SI, 1 amper pe metru (1 A/m).

Magnetizaţia se poate descompune în componente:

$$\bar{M} = \bar{M}_p + \bar{M}_t \tag{4.25}$$

în care: $\bar{M}$ - magnetizaţie;

$\bar{M}_p$ - magnetizaţie permanentă;

$\bar{M}_t$ - magnetizaţie temporară.

4.6.2. Interpretarea microscopică a magnetizaţiei. După cum s-a prezentat în "Electrostatică", sarcina electrică q poate exista liberă ca sarcină pozitivă sau negativă.

In magnetism, se pare că, nu există sarcini sau mase magnetice separate analoage sarcinilor electrice. Există împreună şi totdeauna cei doi poli magnetici: polul "nord" şi polul "sud". Incercările de a izola aceşti poli au rămas fără rezultat. Dacă un magnet permanent este spart (Fig. 4.18), fragmentele rezultate formează la rîndul lor magneţi permanenţi cu doi poli: nord şi sud.

Poli magnetici izolaţi sau "monopoli" au fost presupuşi că există de către P.A.M. Dirac în 1931 dar pînă acum nu s-a reuşit totuşi izolarea acestora.

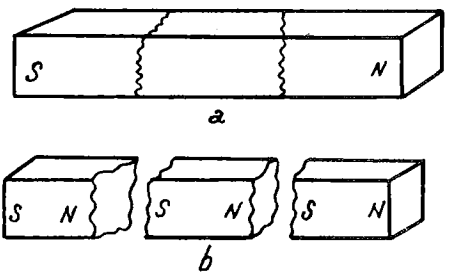


Fig. 4.18. Magnet permanent .
a) întreg; b) spart.

In ceea ce priveşte magnetizarea corpurilor, Ampère a emis ipoteza că această stare de magnetizare reprezintă rezultatul stărilor de magnetizare microscopice. Conform acestei ipoteze, magnetizarea provine din curenţii moleculari care circulă la nivelul moleculelor. Aceşti curenţi moleculari sau legaţi se numesc şi bucle de curent. Pentru un atom, momentul său magnetic este rezultatul momentelor magnetice datorită mişcărilor electronilor pe orbită şi datorită rotirii acestora în jurul axei lor. Orientările acestor momente sînt haotice datorită agitaţiei termice dar sub acţiunea unui cîmp magnetic exterior corpul capătă un moment magnetic rezultant din punct de vedere macroscopic, proporţional cu valoarea intensităţii cîmpului magnetic din corp $\bar{H}$.

Matematic, dependenţa dintre magnetizaţia temporară $\bar{M}_t$ şi intensitatea cîmpului magnetic din corp $\bar{H}$ se scrie:

$$\bar{M}_t = \chi_m \bar{H} \tag{4.26}$$

Aici χ_m - litera grecească se pronunţă hi reprezintă susceptivitatea magnetică.

Această constantă poate fi pozitivă sau negativă.

Corpurile pentru care $\chi_m > 0$ se numesc paramagnetice iar cele patru care $\chi_m < 0$ se numesc diamagnetice.

Moleculele corpurilor paramagnetice au moment magnetic, cîmpul magnetic exterior orientînd în direcţia lui aceste momente magnetice.

Moleculele corpurilor diamagnetice nu au moment magnetic, cîmpul magnetic inducînd un moment magnetic care se opune cîmpului exterior.

O clasă specială o formează corpurile feromagnetice.

Acestea se caracterizează printr-o magnetizare foarte intensă la introducerea lor într-un cîmp magnetic exterior.

Se compun din zone foarte mici cu moment magnetic, orientate în mod haotic în lipsa cîmpului magnetic exterior dacă corpul nu a fost magnetizat anterior.

Introduse într-un cîmp magnetic exterior, tot mai multe zone ale corpului se orientează în direcţia cîmpului pînă ce se atinge o limită denumită limita de saturaţie.

4.6.3. Intensitatea cîmpului magnetic şi inducţia magnetică în interiorul corpurilor.

Pentru caracterizarea stării magnetice a unui corp se folosesc trei mărimi: inducţia magnetică $\bar{B}$, magnetizaţia $\bar{M}$ şi intensitatea cîmpului magnetic $\bar{H}$. Inducţia magnetică în interiorul corpurilor se notează cu $\bar{B}$ spre a fi deosebită de inducţia magnetică în vid, notată după cum s-a prezentat anterior cu $\bar{B}_v$. Analog se foloseşte notarea intensităţii cîmpului magnetic $\bar{H}$. In vid se notează cu $\bar{H}_v$ iar în corpuri cu $\bar{H}$.

Inducţia magnetică $\bar{B}$ caracterizează cîmpul magnetic din interiorul corpurilor iar magnetizaţia $\bar{M}$ reprezintă "reacţia" corpului la cîmpul magnetic în care a fost introdus.

Intensitatea cîmpului magnetic $\bar{H}$, se demonstrează experimental că, are următoarea expresie matematică:

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_o} - \bar{M} \,. \qquad (4.27)$$

Această relaţie se mai scrie şi în modul următor:

$$\bar{B} = \mu_o \bar{H} + \mu_o \bar{M} \tag{4.28}$$

Dacă corpurile nu posedă o magnetizaţie temporară $\bar{M}_t$ sau permanenta $\bar{M}_p$, rezultă că $\bar{M} = 0$ şi relaţia devine:

$$\bar{B} = \mu_o \bar{H} \tag{4.29}$$

Practic nu există substanţă în care $\bar{M} = 0$ şi de aceea relaţia (4.29) este valabilă numai în vid.

Dacă se presupune că $\bar{M}_p = 0$ - corpul nu posedă o magnetizare permanentă - se scrie că:

$$\bar{M}_t = \chi_m \bar{H} . \tag{4.30}$$

Rezultă: $$\bar{M} = \bar{M}_t = \chi_m \bar{H} . \tag{4.31}$$

Prin înlocuire în (4.28)

$$\bar{B} = \mu_o \bar{H} + \mu_o \chi_m \bar{H} = \mu_o (1 + \chi_m) \bar{H} ; \tag{4.32}$$

mărimea

$$1 + \chi_m = \mu_r \tag{4.33}$$

se numeşte <u>permeabilitate relativă</u> a corpului.

Dacă se notează:

$$\mu = \mu_o \mu_r \tag{4.34}$$

în care μ se numeşte <u>permeabilitate absolută</u> a corpului, rezultă:

$$\bar{B} = \mu \bar{H} . \tag{4.35}$$

Adică, inducţia magnetică este proporţională cu intensitatea cîmpului magnetic, coeficientul de proporţionalitate fiind permeabilitatea absolută a corpului.

Pemeabilitatea relativă μ_r poate fi interpretată ca fiind raportul dintre permeabilitatea corpului şi permeabilitatea vidului:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_o} \quad . \tag{4.36}$$

Din această expresie, rezultă că permeabilitatea relativă μ_r capătă următoarele valori:

$\mu_r = 1$ pentru vid;

$\mu_r \simeq 1$ (≃ se citeşte aproximativ egal) pentru corpuri neferomagnetice;

$\mu_r \gg 1$ pentru corpuri feromagnetice; în acest caz, valoarea lui μ_r poate fi de ordinul zecilor de mii.

4.6.4. Fluxul magnetic în corpuri introduse în cîmp magnetic. Legea fluxului magnetic

Se defineşte fluxul magnetic sau fluxul inducţiei magnetice în corpuri, produsul

$$\Phi_s = B\, A_s \quad \text{în care:} \tag{4.37}$$

Φ_s - fluxul magnetic;

B - inducţia magnetică în corp;

A_s - aria suprafeţei S străbătută de liniile de cîmp ale inducţiei B.

Cînd vectorul inducţiei magnetice în corp $\bar{B}$ formează un unghi α cu normala la suprafaţa S, atunci fluxul magnetic Φ_s are următoarea expresie:

$$\Phi_s = B\, A_s \cos \alpha \tag{4.38}$$

La fel ca în cazul cîmpului magnetic în vid şi în cazul cîmpului magnetic în corpuri, fluxul magnetic printr-o suprafaţă închisă este nul. Demonstraţia s-a făcut în paragraful 4.1.2.

Matematic se scrie:

$$\Phi_{\Sigma} = 0$$

în care Σ reprezintă o suprafaţă închisă de orice formă iar inducţia considerată este inducţia magnetică în corpuri $\bar{B}$.

Această expresie $\Phi_{\Sigma} = 0$ reprezintă legea fluxului magnetic cu următorul enunţ: fluxul magnetic printr-o suprafaţă închisă este nul.

Aplicaţia 1. Să se verifice legea fluxului magnetic pentru suprafaţa unui cub de latură a, aşezat într-un cîmp magnetic uniform de inducţie $\bar{B}$ (Fig. 4.19)

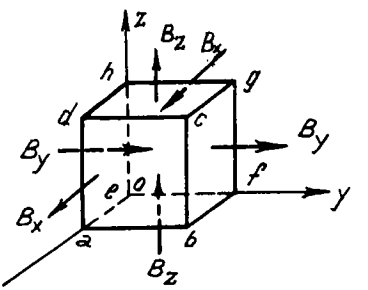


Fig. 4.19. Cub de latură a, aşezat în cîmp magnetic $\bar{B}$.

Fie B_x, B_y şi B_z proiecţiile pe cele trei axe de coordonate O_x, O_y şi O_z, ale inducţiei magnetice $\bar{B}$. Componentele sînt constante deoarece s-a considerat cîmpul uniform. Se calculează fluxul prin cele şase feţe ale cubului, considerînd cu semnul plus cînd fluxul iese din suprafaţă şi cu semnul minus, cînd intră în această suprafaţă.

Rezultă

$$\Phi_{cub} = B_x A_{abcd} - B_x A_{efgh} + B_y A_{bcgf}$$

$$- B_y A_{adeh} + B_z A_{dcgh} - B_z A_{abfe} = 0$$

deoarece ariile laterale ale cubului sînt egale, adică:

$$A_{abcd} = A_{efgh} = \ldots = a^2$$

iar $B_x = B_y = B_z$ pentru că s-a considerat cîmpul uniform.

Aplicaţia 2. Să se calculeze inducţia magnetică a unui cîmp magnetic uniform care printr-o suprafaţă plană S de arie $A_s = 10\ m^2$ orientată sub un unghi de 45^o faţă de liniile de cîmp ale inducţiei, produce un flux $\Phi = 3$ Wb

$$\Phi = B\ A_s \cos\alpha$$

rezultă: $$B = \frac{\Phi}{A_s \cos\alpha} = \frac{3}{10\ \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0,846\ T$$

4.6.5. Fluxul magnetic dintr-o bobină.

Se consideră o bobină formată din N spire, parcursă de curentul i (Fig.4.20). Acest curent produce un flux prin fiecare suprafaţă de spiră Sspiră, care se numeşte flux fascicular şi se notează cu Φ_f.

Fluxul total Φ_t produs prin suprafaţa elicoidală S_{elic} compusă din cele N suprafeţe de spiră $S_{spiră}$ va fi :

$$\Phi_t = N\ \Phi_f \qquad (4.39)$$

în care: Φ_t - fluxul total produs în bobina de N spire;

Φ_f - fluxul fascicular produs de o singură spiră a bobinei.

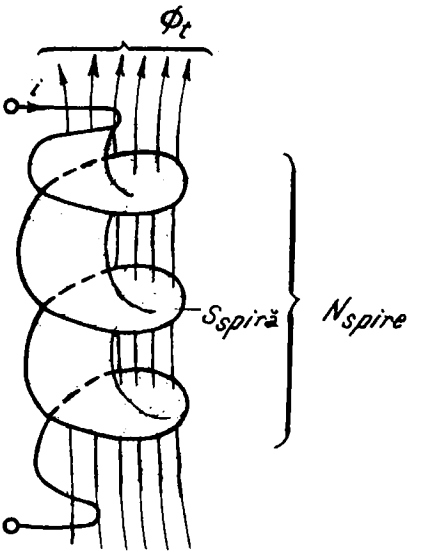


Fig. 4.20. Bobină cu N spire parcursă de curentul i.

4.6.6. Feromagnetismul.

In cazul corpurilor magnetice liniare dependenţa dintre inducţia magnetică $\bar{B}$ şi intensitatea cîmpului magnetic $\bar{H}$ este o linie dreaptă (Fig. 4.21).

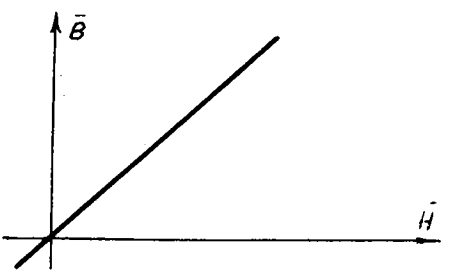


Fig. 4.21. Curba $\bar{B} = f(\bar{H})$ în medii magnetice liniare.

Pentru materialele feromagnetice, dependenţa dintre inducţia $\bar{B}$ şi intensitatea cîmpului magnetic $\bar{H}$ nu mai este o dreaptă ci este o curbă denumită şi curbă de magnetizare (Fig. 4.22).

Cînd intensitatea cîmpului magnetic $\bar{H}$ oscilează între două valori egale şi de sens contrar, punctul curent descrie o curbă de formă simetrică în raport

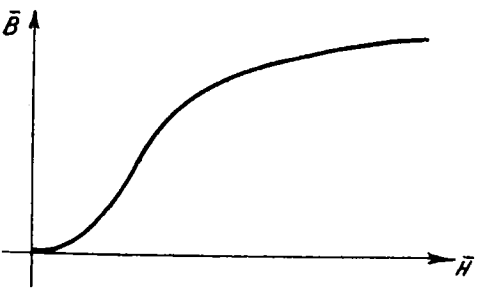


Fig. 4.22. Curba de magnetizare.

cu originea axelor de coordonate denumită ciclu de hysterezis (Fig. 4.23). Se consideră un material feromagnetic care nu a mai fost magnetizat anterior adică inducţia şi intensitatea cîmpului magnetic sînt nule în absenţa cîmpului magnetic exterior.

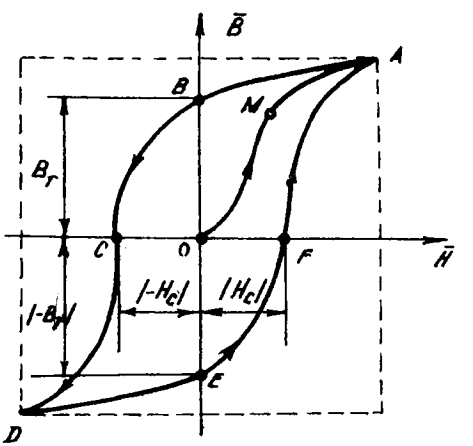


Fig. 4.23. Ciclu de hysterezis.

Dacă se introduce materialul feromagnetic într-un cîmp magnetic care poate fi variat - de exemplu în interiorul unei bobine prin care trece un curent electric ce se poate regla - atunci se va constata următoarele:

La început,magnetizarea începe de la zero şi se măreşte intensitatea curentului într-un sens pe care îl vom considera pozitiv pînă cînd se va atinge un punct de saturaţie A al materialului feromagnetic. Punctul curent M va descrie curba OA. Dacă se scade cîmpul magnetic $\bar{H}$ pînă la anularea lui (curentul devine egal cu zero), punctul curent M va descrie o altă curbă AB astfel încît pentru $\bar{H} = 0$, inducţia magnetică va avea o valoare $B_r = 0B$ diferită de zero numită inducţie remanentă.

Pentru a anula inducţia remanentă este necesară o magnetizare în sens contrar, obţinută prin cîmpul magnetic $|-H_c| = 0C$. Punctul M va descrie curba B C.

Continuînd magnetizarea în sens invers, se parcurge porţiunea C D după care urmînd o nouă anulare a cîmpului magnetic şi o nouă creştere a lui la o valoare pozitivă, se vor descrie porţiunile DE, E F şi F A.

Abscisele $0C = 0F = H_c$ reprezintă cîmpul magnetic coercitiv iar ordonatele $0E = 0B = B_r$ reprezintă inducţia magnetică remanentă. Această curbă descrisă de punctul M reprezintă ciclul de hysterezis. După forma acestei curbe, corpurile feromagnetice se împart în moi şi dure.

4.6.7. Materiale feromagnetice moi (Fig. 4.24)

Se caracterizează prin aria ciclului de hysterezis mică (pierderi magnetice mici), permeabilitate relativă mare şi cîmp coercitiv mic (cca 80 A/m).

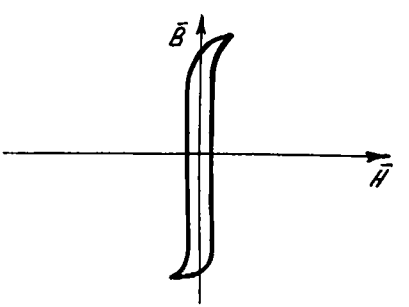


Fig. 4.24. Ciclu de hysterezis pentru materiale feromagnetice moi.

Exemple de materiale feromagnetice moi sînt oţelul cu un adaus de 4% siliciu şi "permalloy" ul, aliaj de mare permeabilitate (78,5% Ni şi 21,5% Fe).

Materialele feromagnetice moi se folosesc la construcţia maşinilor şi aparatelor electrice deoarece au permeabilitate ridicată şi pierderi prin hysterezis mici, ceeace determină un randament ridicat în funcţionare.

4.6.8. Materiale feromagnetice dure (Fig. 4.25).

Sînt caracterizate prin permeabilitate relativă redusă şi cîmp coercitiv mare (cca 4000 A/m).

Remanenţa stabilă mare a acestor materiale le fac utile în construcţia magneţilor permanenţi. Materialul feromagnetic dur este oţelul cu un adaus de 1% carbon.

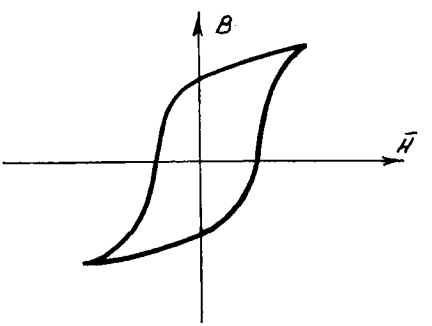


Fig. 4.25. Ciclu de hysterezis pentru materiale feromagnetice dure.

4.6.9. Materiale ferimagnetice

Se mai numesc ferite şi sînt soluţii solide de oxizi de fier şi mangan care au magnetizaţia permanentă M_p funcţie de temperatură şi conductivitate electrică scăzută. Se folosesc în calculatoare pentru construcţia memoriilor pe bază de inele de ferită sau la construcţia miezurilor de antene radio.

4.7. Circuite magnetice

Ansamblurile de bobine cu miez de fier prin care se închid fluxurile magnetice formează circuitele magnetice.

Ca şi circuitele de curent continuu, circuitele magnetice au noduri şi laturi confecţionate în cea mai mare parte din miezuri feromagnetice întrerupte uneori de porţiuni subţiri de aer numite întrefieruri. Surselor de tensiune electromotoare din curent continuu, le corespund în cazul acesta bobinajele înfăşurate pe miezuri, parcurse de curenţi.

La calculul unui circuit magnetic se cere:

- determinarea fluxurilor magnetice fasciculare cînd se cunosc solenaţiile, permeabilităţile magnetice ale miezurilor feromagnetice şi geometria circuitului magnetic;

- determinarea solenaţiilor cînd se cunosc fluxurile magnetice fasciculare, permeabilităţile magnetice şi geometria circuitului magnetic;

- probleme combinate.

Pentru simplificarea calculelor circuitului magnetic se admit următoarele ipoteze:

- fluxul de dispersie este zero (reprezintă fluxul care nu se închide prin circuitul feromagnetic ci se închide prin aer); aceasta înseamnă că inducţia magnetică în miezul feromagnetic este egală cu inducţia magnetică în aer;

- inducţia magnetică este uniformă şi omoparalelă cu normala la suprafaţa secţiunii dusă prin miezul feromagnetic;

- intensitatea cîmpului magnetic este omoparalelă cu linia mijlocie a laturii circuitului magnetic.

Exemple de circuite magnetice cu aplicaţii practice sînt transformatoarele şi bobinele magnetice.

4.7.1. Reluctanţa magnetică

Se consideră o latură dintr-un circuit magnetic (Fig. 4.26).

Se notează cu l lungimea laturii respective şi cu μ permeabilitatea magnetică absolută a materialului din care este realizată latura.

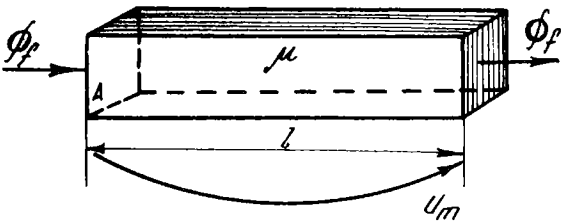


Fig. 4.26. Latură de circuit magnetic.

Fluxul care străbate o secţiune transversală A este fluxul fascicular Φ_f şi este acelaşi prin oricare secţiune transversală a laturii.

Din cele prezentate anterior, se poate scrie expresia tensiunii magnetice în lungul laturii:

$$U_m = H \cdot l = \frac{B}{\mu} l = \frac{l}{\mu A} \Phi_f \cdot \qquad (4.40)$$

Aici, intensitatea cîmpului magnetic H s-a exprimat faţă de inducţia magnetică B din latura respectivă prin relaţia:

$$H = \frac{B}{\mu} \cdot$$

Tot în (4.40) inducţia magnetică B în raport cu fluxul fascicular Φ_f s-a înlocuit cu:

$$B = \frac{\Phi_f}{A}$$

Mărimea $\frac{l}{\mu A}$ din expresia (4.40) se numeşte reluctanta magnetică şi se notează:

$$R_m = \frac{l}{\mu A} \cdot \qquad (4.41)$$

Unitatea de măsură pentru reluctanţa magnetică în S I este 1 (Henry)$^{-1}$ sau $\left(\frac{1}{H}\right)$.

4.7.2. Legea lui Ohm pentru o latură de circuit magnetic

Tensiunea magnetică se scrie, după introducerea reluctanţei magnetice R_m, astfel:

$$U_m = R_m \Phi_f \tag{4.42}$$

Expresia reprezintă legea lui Ohm pentru o latură de circuit magnetic. Denumirea provine din asemănarea formală cu legea lui Ohm din circuitele de curent continuu: $U = Ri$.

Produsul $R_m \Phi_f$ se mai numeşte şi căderea de tensiune magnetică.

4.7.3. Legea lui Ohm pentru un circuit magnetic închis. Se consideră că latura respectivă formează un circuit magnetic închis pe care este înfăşurată o bobină compusă din N spire, parcurse de curentul i (Fig. 4.27).

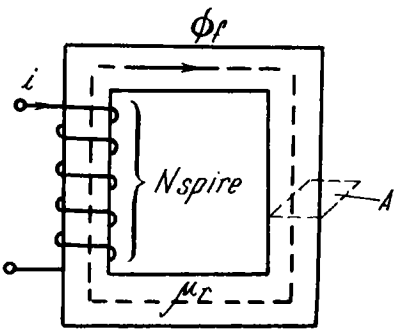


Fig. 4.27. Circuit magnetic închis.

Legea lui Ohm pentru circuit închis se scrie:

$$U_{mm} = R_m \Phi_f \tag{4.43}$$

In care U_{mm} reprezintă tensiunea magnetică pe un circuit închis care se numeşte după cum s-a prezentat anterior tensiune magnetomotoare.

Conform teoremei lui Ampère (4.21 a) tensiunea magnetomotoare este egală cu solenaţia Ni adică:

$$U_{mm} = Ni \quad .$$

Rezultă $$R_m \Phi_f = Ni$$

sau $$\Phi_f = \frac{Ni}{R_m} \quad . \tag{4.44}$$

Aceasta reprezintă legea lui Ohm pentru un circuit magnetic închis prin analogie cu legea lui Ohm din curent continuu $\left(I = \frac{E}{R} \right.$ în care E reprezintă tensiunea electromotoare şi R rezistenţa totală$\left. \right)$.

Aplicaţie. Să se calculeze fluxul fascicular şi inducţia magnetică B într-o bobină cu circuit magnetic închis avînd lungimea l = 1 m, aria secţiunii transversale A = 0,01 m^2 şi permeabilitatea magnetică relativă μ_r = 500. Numărul de spire ale bobinei de magnetizare N = 1 000 spire străbătute de curentul i = 0,5 A.

Reluctanţa magnetică a circuitului magnetic:

$$R_m = \frac{l}{\mu A} = \frac{l}{\mu_o \mu_r A} = \frac{1}{4. \pi . 10^{-7} \; 500. \; 0,01} = \frac{10^6}{2\pi} \; H^{-1} .$$

Solenaţia:

$$Ni = 1\,000 \; . \; 0,5 = 500 \text{ Asp.}$$

Fluxul fascicular rezultă:

$$\Phi_f = \frac{Ni}{R_m} = \frac{500}{\frac{10^6}{2\pi}} = \pi \; . \; 10^{-3} \text{ Wb} = \pi \text{ m Wb}$$

Inducţia magnetică B rezultă:

$$B = \frac{\Phi_f}{A} = \frac{\pi . \; 10^{-3}}{0,01} = \pi \, 10^{-1} = 0,314 \text{ T}$$

4.7.4. Teoremele lui Kirchhoff pentru circuite magnetice

Teorema întîi a lui Kirchhoff. Această teoremă se referă la un nod de circuit magnetic. Se consideră un nod de circuit magnetic din care se ramifică mai multe laturi (Fig. 4.28)

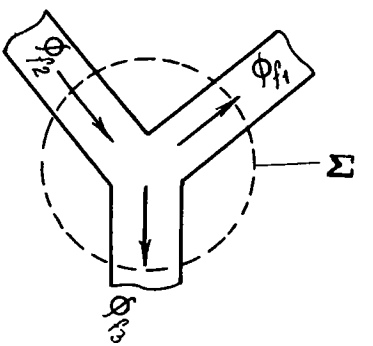


Fig. 4.28. Nod de circuit magnetic.

Se consideră suprafaţa închisă Σ care înconjoară nodul respectiv. Din legea fluxului magnetic, prezentată anterior, se scrie:

$$\Phi_{\Sigma} = 0 .$$

Dar:

$$\Phi_{\Sigma} = \Phi_{f1} - \Phi_{f2} + \Phi_{f3} \qquad (4.45)$$

Rezultă $\Phi_{f1} - \Phi_{f2} + \Phi_{f3} = 0$ teorema întîi a lui Kirchhoff cu

următorul enunţ:

suma algebrică a fluxurilor magnetice fasciculare din laturile care concură într-un nod de circuit magnetic este nulă.

Există regula prin care fluxurile care ies din nod se consideră pozitive iar cele care intră se consideră negative.

Aplicaţie. In nodul din Fig. 4.28, fluxurile fasciculare au valorile : $\Phi_{f1} = 0,1$ Wb şi $\Phi_{f2} = 0,3$ Wb. Să se determine fluxul fascicular Φ_{f3}.

Din $$\Phi_{f1} - \Phi_{f2} + \Phi_{f3} = 0 ,$$

Se obţine $$\Phi_{f3} = \Phi_{f2} - \Phi_{f1} = 0,3 - 0,1 = 0,2 \quad Wb .$$

Teorema a doua a lui Kirchhoff. Se consideră un drum închis sau ochi format din laturi de circuit magnetic (Fig. 4.29). Conform teoremei lui Ampère se scrie pe acest ochi de circuit magnetic o:

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 = N_1 i_1 - N_2 i_2 + N_3 i_3$$

dar $H_1 l_1 = U_{m1}$ - tensiunea magnetică prin latura 1,

$$H_2 l_2 = U_{m2}$$

şi $$H_3 l_3 = U_{m3} .$$

Se scrie:

$$U_{m1} + U_{m2} + U_{m3} = N_1 i_1 - N_2 i_2 + N_3 i_3$$

dar $U_{m1} = R_{m1} \Phi_{f1}$; $U_{m2} = R_{m2} \Phi_{f2}$; $U_{m3} = R_{m3} \Phi_{f3}$ - conform legii lui Ohm.

Rezultă:

$$R_{m1} \Phi_{f1} + R_{m2} \Phi_{f2} + R_{m3} \Phi_{f3} = N_1 i_1 - N_2 i_2 + N_3 i_3 \qquad (4.46)$$

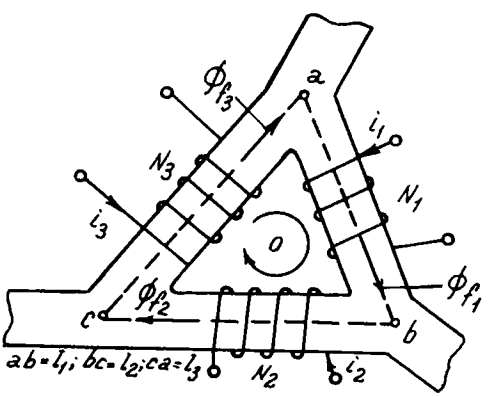


Fig. 4.29. Ochi de circuit magnetic.

Această relaţie reprezintă teorema a doua a lui Kirchhoff cu enunţul următor:

- suma algebrică a căderilor de tensiune magnetică din laturile unui ochi de circuit magnetic este egală cu suma algebrică a solenaţiilor bobinelor din laturile ochiului.

Există regula prin care căderile de tensiune magnetică şi solenaţiile care se întîlnesc în sens contrar sensului de parcurs se consideră negative.

4.7.5. Analogia cu circuitele electrice. Rezolvarea circuitelor magnetice cu teoremele lui Kirchhoff se aseamănă cu rezolvarea circuitelor electrice de curent continuu. Aceasta permite să se facă următoarea corespondenţă între mărimile circuitelor magnetice şi mărimile circuitelor electrice:

- tensiunea magnetică $U_m \Rightarrow$ tensiunea electrică U ;
- fluxul magnetic fascicular $\Phi_f \Rightarrow$ curent electric I ;
- solenaţia Ni $\Rightarrow$ tensiunea electromotoare E ;
- reluctanţa magnetică $R_m \Rightarrow$ rezistenţa electrică R ;
- permeabilitatea $\mu \Rightarrow$ conductivitatea σ.

Pe baza acestor analogii, un circuit magnetic poate fi reprezentat printr-o schemă de circuit electric care se rezolvă cu metodele circuitelor electrice de curent continuu.

Aplicaţie . Se consideră circuitul magnetic din Fig. 4.30 în care se dau:

$l = 12$ cm

$\Delta = 2$ mm

$N = 700$ spire

$i = 10$ A

$A = 2,5\ cm^2$

Se cer fluxurile fasciculare considerînd materialul magnetic liniar cu $\mu = 600\ \mu_0$.

Rezolvare

Pentru acest circuit magnetic liniar, se poate reprezenta schema de circuit electric echivalentă din Fig. 4.31.

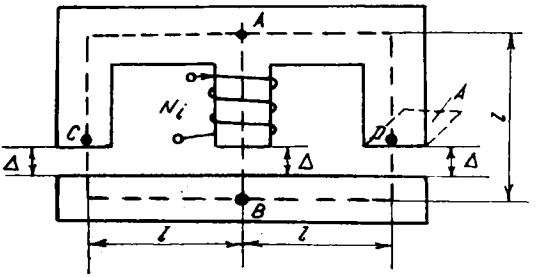


Fig. 4. 30.

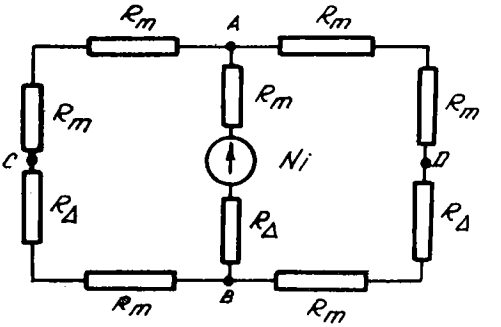


Fig. 4. 31.

Schema echivalentă se simplifică prin înlocuirea reluctanţelor legate în serie cu reluctanţa echivalentă (Fig. 4. 32).

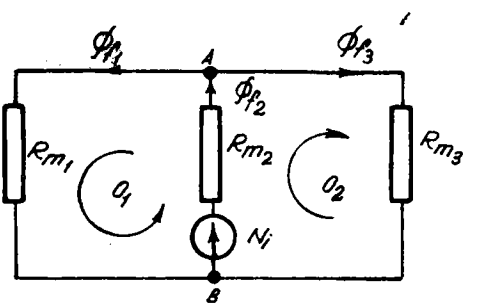


Fig. 4. 32.

Se aleg sensuri arbitrare pentru fluxurile fasciculare Φ_{f1}, Φ_{f2} şi Φ_{f3}.

Se calculează reluctanţele magnetice din Fig. 4. 31 respectiv reluctanţele magnetice echivalente din Fig. 4. 32.

$$R_m = \frac{l}{\mu A} = \frac{12 \cdot 10^{-2}}{600 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}} = \frac{2}{\pi} \; 10^6 \; H^{-1}$$

$$R_\Delta = \frac{\Delta}{\mu_o A} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}} = \frac{20}{\pi} 10^6 \; H^{-1}$$

$$R_{m1} = R_{m3} = 3 R_m + R_\Delta = 3 \frac{2}{\pi} 10^6 + \frac{20}{\pi} 10^6 = \frac{26}{\pi} 10^6 \; H^{-1}$$

$$R_{m2} = R_m + R_\Delta = \frac{2}{\pi} 10^6 + \frac{20}{\pi} 10^6 = \frac{22}{\pi} 10^6 \; H^{-1}$$

Se scriu ecuaţiile cu teoremele lui Kirchhoff pentru schema echivalentă din Fig. 4. 32.

$$\Phi_{f1} - \Phi_{f2} + \Phi_{f3} = 0 \qquad \text{în nodul A}$$

$$R_{m1} \Phi_{f1} + R_{m2} \Phi_{f2} = Ni \qquad \text{pe ochiul } o_1$$

$$R_{m2} \Phi_{f2} + R_{m3} \Phi_{f3} = Ni \qquad \text{pe ochiul } o_2$$

Rezolvînd sistemul, rezultă valorile fluxurilor fasciculare:

$$\Phi_{f1} = \Phi_{f3} = \pi \cdot 10^{-4} \text{ Wb şi } \Phi_{f2} = 2 \cdot \pi \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

4. 7. 6. Calculul circuitelor magnetice

1. Calculul geometriei circuitului magnetic

Rezolvarea circuitului magnetic în acest caz, urmăreşte determinarea secţiunii şi lungimii circuitului magnetic.

Se cunoaşte mai întîi fluxul magnetic din miezul circuitului. Se adoptă inducţia magnetică astfel încît să aibă o valoare corespunzătoare zonei nesaturate sau în apropierea cotului curbei de magnetizare a materialului folosit la realizarea miezului magnetic. Lungimea circuitului magnetic se obţine avînd la bază considerente constructive.

2. Calculul solenaţiilor. In astfel de circuite magnetice care se cer a fi rezolvate, se cunoaşte sau se impune realizarea unei inducţii magnetice de o anumită valoare în intrefierul circuitului magnetic.

Circuite magnetice cu întrefier sînt întîlnite frecvent în construcţia maşinilor şi aparatelor electrice. Se determină solenaţia necesară pentru a realiza inducţia din intrefier, impusă.

Aplicaţie. Să se determine solenaţia şi intensitatea curentului electric care trece prin bobina electromagnetului din Fig. 4.33 pentru a produce o inducţie în întrefier $B_o = 1$ T.

Se dau:

- numărul de spire $N = 230$ spire;
- lungimea medie a liniilor de cîmp în miez $l_m = 15$ cm;
- lungimea medie a liniilor de cîmp în armătura mobilă $l_a = 4,5$ cm;
- lungimea intrefierurilor $\Delta = 0,04\ \pi$ mm;
- secţiunea miezului armăturii şi intrefierului este constantă $A = 2$ cm^2.

Electromagnetul este realizat din oţel electrotehnic turnat.

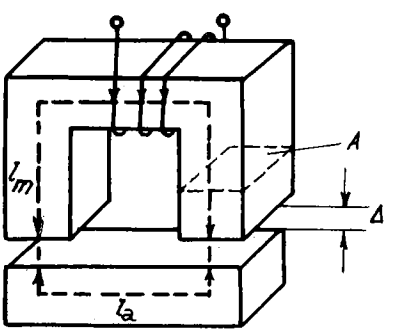


Fig. 4.33. Electromagnet

Se determină mai întîi, din curba de magnetizare pentru oţel turnat (Fig. 4. 34), intensitatea cîmpului magnetic H. Dacă se neglijează dispersia, inducţia în fier B este egală cu inducţia în întrefier B_o. Rezultă din Fig. 4. 34 că pentru B = 1 T corespunde o intensitate a cîmpului magnetic H = 560 A/m.

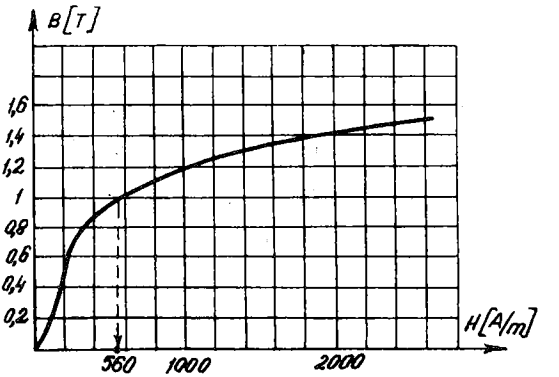


Fig. 4. 34. Curbă de magnetizare pentru oţel turnat.

Din teorema lui Ampère

$$U_{mm} = Ni$$

se obţine

$$Hl_m + Hl_a + 2\, H_o\, \Delta = Ni$$

în care H_o este intensitatea cîmpului magnetic în intrefier şi egală cu:

$$H_o = \frac{B_o}{\mu_o} = \frac{1}{4\,\pi\,10^{-7}}$$

Prin înlocuire se obţine solenaţia Ni·

$$Ni = 560\,\left[15 + 4,5\right]\,10^{-2} + 2\,\frac{1}{4\pi\cdot 10^{-7}}\;0,04\,.\,\pi\,.\,10^{-3} = 310,5\ \text{Asp.}$$

Intensitatea curentului electric va fi:

$$i = \frac{Ni}{N} = \frac{310,5}{230} = 1,35\ \text{A.}$$

3. Calculul inducţiei magnetice în intrefier

Pentru a rezolva astfel de probleme, trebuie să se cunoască:

- curba de magnetizare a materialului din care este confecţionat circuitul magnetic;

- solenaţia;

- dimensiunile geometrice ale circuitului magnetic.

Din curba de magnetizare se deduce şi se reprezintă grafic caracteristica de magnetizare a circuitului magnetic.

Aceasta este o curbă $B_o = f(Ni)$ (Fig. 4. 35)

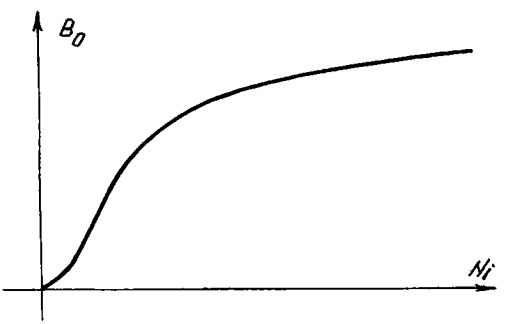


Fig. 4. 35. Caracteristica de magnetizare.

Ca formă este asemănătoare curbei de magnetizare a materialului magnetic.

Odată determinată caracteristica de magnetizare, problema este aproape rezolvată; pentru valoarea cunoscută din problemă a solenaţiei, se obţine inducţia magnetică în întrefier B_o. Problema se consideră astfel terminată.

De reţinut este deosebirea dintre curba de magnetizare a materialului magnetic şi caracteristica de magnetizare a circuitului magnetic. Curba de magnetizare reprezintă grafic dependenţa $B = f(H)$ pentru un material feromagnetic anumit. Caracteristica de magnetizare reprezintă însă dependenţa dintre inducţia magnetică în întrefier B_o sau fluxul magnetic în intrefier Φ_o şi solenaţia Ni necesară creerii acestei inducţii B_o într-un circuit magnetic neomogen $[B_o = f(Ni$ sau $\Phi_o = f(Ni)]$.

Aplicaţie . Să se determine inducţia magnetică din întrefierul electromagnetului prezentat în Fig. 4. 33 dacă se micşorează de două ori curentul care străbate bobina electromagnetului.

Această problemă este inversa problemei de la punctul 2; se cere determinarea inducţiei magnetice în întrefier atunci cînd se cunoaşte solenaţia.

Cum se procedează? Din curba de magnetizare (Fig. 4. 34) la o valoare aleasă a inducţiei magnetice B, corespunde o anumită valoare pentru intensitatea cîmpului magnetic H.

Odată cunoscută intensitatea H, se poate calcula tensiunea magnetomotoare U_{mm} care conform teoremei lui Ampère ($U_{mm} = Ni$) reprezintă chiar solenaţia Ni.

Se adoptă un şir de valori pentru inducţia magnetică B şi se calculează conform acestui procedeu solenaţiile corespunzătoare. Valorile se trec într-un tabel şi se folosesc pentru reprezentarea grafică a caracteristicii de magnetizare.

In fine, pentru o solenaţie fixată prin problemă, se determină inducţia magnetică din miezul magnetic, egală cu inducţia magnetică din întrefier B_o, cerută prin problemă.

In cazul aplicaţiei, se aleg valori ale inducţiei magnetice ($B = B_o$) : 0, 25; 0, 3; 0, 4; 0, 5; 0, 6; 0, 75; 0, 9; 1 Tesla.

Din curba de magnetizare (Fig. 4. 34) la o inducţie magnetică $B = B_o = 0, 25$ T , corespunde pentru intensitatea cîmpului magnetic o valoare H = 120 A/m.

Solenaţia Ni se determină din:

$$Ni = H_{lm} + H_{la} + 2 H_o \Delta \quad \text{sau}$$

$$Ni = H (l_m + l_a) + 2 \frac{B_o}{\mu_o} \Delta \text{ în care } H_o = \frac{B_o}{\mu_o}$$

sau

$$Ni = H (15 + 4,5) 10^{-2} + \frac{2 . 0,04 \pi . 10^{-3}}{4 \pi . 10^{-7}} B_o =$$

$$= 0,195 H + 200 B_o$$

respectiv $Ni = 0,195 . 120 + 200 . 0.25 = 73,4$ Asp.

Asemănător, se calculează şi pentru celelalte valori:

$$B_o = (0,3 \div 1)\ T \ .$$

Rezultatele se notează în tabelul 4.1.

Tabelul 4.1.

$B_o(T)$	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,75	0,9	1
H(A/m)	120	135	165	185	220	275	400	570
0,195 H	23,4	26,4	32,2	36	43	54	78	111
200 B_o	50	60	80	100	120	150	180	200
Ni(Asp)	73,4	86.4	112,2	136	163	204	258	311

Cu ajutorul datelor din tabelul 4.1. se reprezintă grafic caracteristica de magnetizare a circuitului (Fig. 4.36).

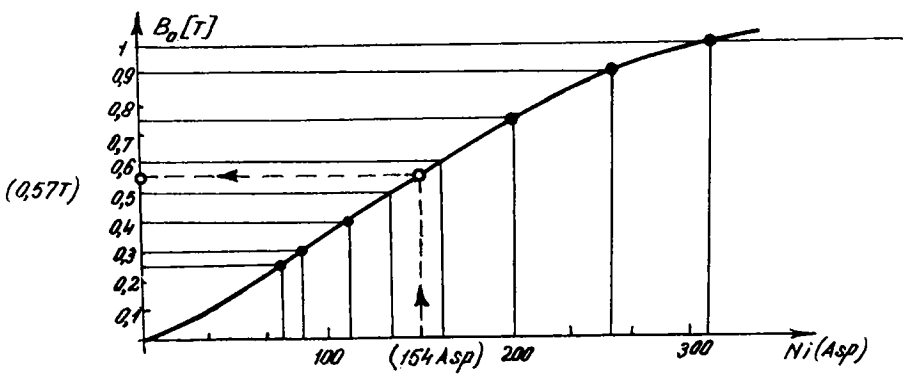


Fig. 4.36.

La curentul i micşorat de două ori, adică:

$$\frac{i}{2} = \frac{1,35}{2} = 0,67 \text{ A}$$

corespunde solenaţia:

$$Ni = 230 \ . \ 0,67 \cong 154 \text{ Asp.}$$

Din caracteristica de magnetizare (Fig. 4. 36) pentru o solenaţie Ni = 154 Asp. corespunde o inducţie magnetică în întrefier:

$$B_o = 0,57 \text{ T} \quad .$$

4. 8. Bobine electrice

Dispozitivele care realizează cîmpuri magnetice în interiorul lor cînd sînt parcurse de curenţi electrici, sînt bobinele electrice (Fig. 4. 37).

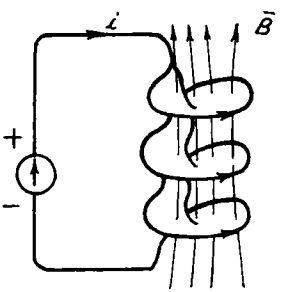


Fig. 4. 37. Bobină electrică.

In firele electrice de legătură ale diverselor instalaţii, cîmpul magnetic creat de curenţii din aceste fire este mai puţin intens.

Pentru a caracteriza "capacitatea" unei bobine de a da naştere unui flux magnetic atunci cînd este parcursă de un curent electric, se introduce o mărime denumită inductivitate:

$$L = \frac{\Phi_t}{i} \qquad (4.47)$$

în care: Φ_t este fluxul total prin bobină şi i este curentul care străbate bobina.

4.8.1. Inductivitatea unei bobine

Se consideră o bobină de lungime l cu N spire, parcurse de curentul i, înfăşurate pe un miez magnetic de permeabilitate relativă μ_r (Fig. 4.38).

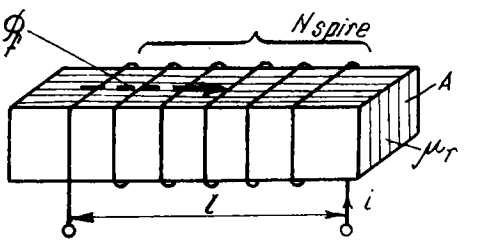


Fig. 4.38. Solenoid.

Inductivitatea bobinei este

$$L = \frac{\Phi_t}{i}$$

în care fluxul total

$$\Phi_t = N \Phi_f , \qquad (4.48)$$

Φ_f fiind fluxul fascicular.

Dar fluxul fascicular conform (4.44) este

$$\Phi_f = \frac{Ni}{R_m}$$

în care R_m reprezintă reluctanţa magnetică

$$R_m = \frac{l}{\mu A} = \frac{l}{\mu_o \mu_r A} \quad \text{conform (4.41)}$$

Deci

$$\Phi_f = \frac{Ni}{\frac{l}{\mu_o \mu_r A}} = \mu_o \mu_r Ni \frac{A}{l}$$

iar inductivitatea rezultă

$$L = \frac{\Phi_t}{i} = \frac{N\,\Phi_f}{i} = \frac{\mu_o\,\mu_r\,Ni\frac{A}{l}\,N}{i}$$

sau

$$L = \mu_o\,\mu_r\,N^2\,\frac{A}{l}\,. \qquad (4.49)$$

Inductivitatea este o mărime independentă de flux şi de curent. Este proporţională cu pătratul numărului de spire, cu permeabilitatea şi cu aria secţiunii miezului şi invers proporţională cu lungimea acestuia.

Unitatea de măsură în S I pentru inductivitate se numeşte henry (1H).

$$1 \text{ henry} = \frac{1 \text{ weber}}{1 \text{ amper}} = 1\,\frac{\text{Wb}}{\text{A}} = 1 \text{ H}$$

cu submultiplul milihenry 1 mH = 10^{-3} H.

Aplicaţia 1. Pe un circuit magnetic (Fig. 4.39) din oţel electrotehnic turnat (curba de magnetizare în Fig. 4.40), de lungime medie l_{med} = 30 cm, se află o înfăşurare compusă din două părţi identice de lungime l = 80 mm fiecare şi număr de spire $N_1 = N_2$ = 540 spire.

Secţiunea circuitului magnetic este un pătrat cu latura de 2 cm. Să se calculeze inductivitatea bobinei cu circuit magnetic şi fără circuit magnetic. Inducţia magnetică este egală cu 1,35 T. Linia mediană a înfăşurării este un pătrat de latură egală cu 3 cm.

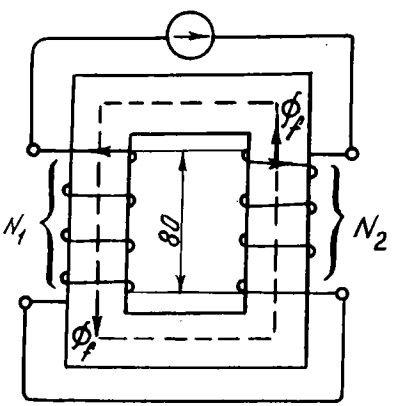


Fig. 4.39.

Cele două părţi ale înfăşurării sînt legate în aşa fel încît curentul care le parcurge i generează un flux adiţional.

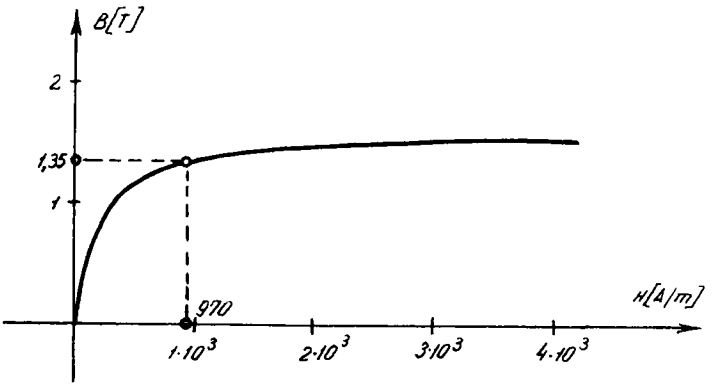


Fig. 4.40.

Rezolvare

a) Fluxul magnetic Φ_f al circuitului magnetic este indicat în Fig. 4.39. Conform datelor problemei, fluxul magnetic este acelaşi în cele două înfăşurări. Din acest motiv se poate considera o singură înfăşurare cu număr de spire:

$$N = N_1 + N_2 = 540 + 540 = 1080 \text{ spire}$$

b) Calculul inductivităţii cu circuit magnetic.

Prin definiţie, inductivitatea

$$L = \frac{\Phi_t}{i} = \frac{N \Phi_f}{i}$$

Dar $\Phi_f = BA$

iar $i = \frac{Hl_{med}}{N}$

Rezultă : $L = \frac{B N^2 A}{Hl_{med}}$.

Dependenţa dintre B şi H se obţine din curba de magnetizare (Fig. 4.40)

Pentru o inducţie magnetică în fier B = 1,35 T, corespunde o intensitate a cîmpului magnetic H = 970 A/m.

Se înlocuieşte în expresia inductivităţii L şi se obţine:

$$L = \frac{1,35 \cdot 4 \cdot 10^{-4} (1080)^2}{970 \cdot 0,3} = 2,17 \text{ H}$$

c) Calculul inductivităţii în lipsa circuitului magnetic. Se consideră bobinele înfăşurate una în prelungirea celeilalte în vederea simplificării calculelor. Folosind relaţia

$$L = \mu_o \mu_r N^2 \frac{A}{l}$$

se obţine:

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1.(1080)^2 \frac{9 \cdot 10^{-4}}{0,8 + 0,8} =$$

$$8,26 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

S-a luat permeabilitatea relativă pentru aer $\mu_r = 1$ iar secţiunea bobinei $A = (3 \cdot 10^{-2})^2 = 9 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$

Aplicaţia 2. Inductivitatea unui solenoid cu miez de fier este L = 0,5 H. Dacă se scoate miezul, inductivitatea devine L_o = 0,025 H. Să se calculeze permeabilitatea relativă μ_r.

Inductivitatea cu miez de fier este:

$$L = \mu_o \mu_r N^2 \frac{A}{l} .$$

Fără miez de fier $L_o = \mu_o N^2 \frac{A}{l}$.

Rezultă $\frac{L}{L_o} = \mu_r = \frac{0,5}{0,025} = 200$.

4.8.2. Inductivităţi proprii şi mutuale

Se consideră două bobine înfăşurate pe un miez de permeabilitate relativă μ_r şi secţiune A (Fig. 4.41). Lungimea fiecărei bobine este l iar numărul de spire este N_1 respectiv N_2. Bobinele sînt parcurse de curenţii i_1 şi i_2. Fluxurile fasciculare care apar în miezul magnetic determinate de curenţii i_1 şi i_2 din cele două bobine sînt Φ_{f1} respective Φ_{f2}.

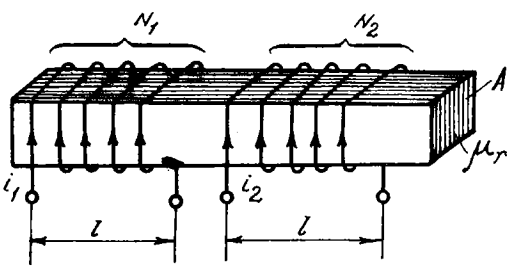


Fig. 4.41. Două bobine înfăşurate pe un miez magnetic.

Dacă $i_1 \neq 0$ şi $i_2 = 0$ adică bobina N_1 este parcursă de curent, dar prin bobina N_2 nu trece curent, există numai fluxul fascicular Φ_{f1}.

In acest caz fluxurile totale prin cele două bobine vor fi :

Bobina N_1 $$\Phi_{11} = N_1 \Phi_{f1} \quad (4.50)$$

Bobina N_2 $$\Phi_{21} = N_2 \Phi_{f1} \quad (4.51)$$

Dacă $i_1 = 0$ şi $i_2 \neq 0$, bobina N_2 va fi parcursă de curent iar prin bobina N_1 nu va trece curent.

Fluxurile totale vor fi:

Bobina N_1 $$\Phi_{12} = N_1 \Phi_{f2} \quad (4.52)$$

Bobina N_2 $$\Phi_{22} = N_2 \Phi_{f2} \quad (4.53)$$

Cu aceste precizări, se pot defini inductivităţile proprii ale bobinelor. Inductivitatea proprie a bobinei N_1 va fi:

$$L_{11} = \frac{\Phi_{11}}{i_1} \tag{4.54}$$

şi inductivitatea proprie a bobinei N_2

$$L_{22} = \frac{\Phi_{22}}{i_2} . \tag{4.55}$$

Se introduce şi noţiunea de inductivitate mutuală. In cazul celor două bobine, vom avea:

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{i_2} ; \tag{4.56}$$

$$L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_1} . \tag{4.57}$$

Inductivităţile mutuale se măsoară ca şi cele proprii în henry (H).

Se demonstrează cu $L_{12} = L_{21}$. O altă notaţie folosită pentru inductivitatea mutuală este M.

Deci se poate scrie:

$$L_{12} = L_{21} = M \tag{4.58}$$

De asemenea, se poate demonstra că în cazul unui cuplaj perfect

$$L_{11} L_{22} = L_{12}^2 = M \tag{4.59}$$

sau

$$M = \sqrt{L_{11} \cdot L_{22}} \tag{4.60}$$

4.8.3. Coeficient de cuplaj

In cazul în care intervine fenomenul de dispersie, cuplajul nu mai este perfect şi relaţia (4.60) se exprimă cu ajutorul unui coeficient k cuprins între zero şi unu : $(0 \leq k \leq 1)$.

$$M = k\sqrt{L_{11}\,L_{12}} \tag{4.61}$$

Coeficientul k se numeşte coeficient de cuplaj; cînd cuplajul este perfect $k = 1$ şi

$$M = \sqrt{L_{11}\,L_{22}}\ .$$

Cînd bobinele nu sînt cuplate magnetic, $k = 0$ şi

$$M = 0\ .$$

Aplicaţia 1. Două bobine cuplate magnetic au inductivităţile proprii $L_{11} = 0,05$ H şi $L_{22} = 0,2$ H. Coeficientul de cuplaj al celor două bobine este $k = 0,3$. Se cere determinarea inductivităţii mutuale M.

$$M = k\sqrt{L_{11}\,L_{22}} = 0,3\sqrt{5.10^{-2}.2.10^{-1}} = 0,3\ .\ 10^{-1} = 0,03\ \text{H}.$$

Aplicaţia 2. Pe un tor din material amagnetic ($\mu = \mu_0$) sînt plasate două înfăşurări cu număr de spire $N_1 = 2000$ şi $N_2 = 4000$ (Fig. 4.42). Diametrul liniei mijlocii a torului este $D = 10$ cm iar secţiunea transversală a torului este un patrat cu aria $A = 4\ \text{cm}^2$.

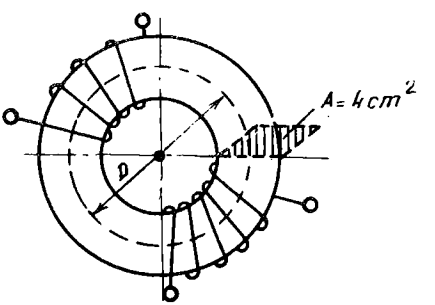


Fig. 4.42. Tor cu două înfăşurări.

Să se calculeze inductivitatea mutuală M a celor două înfăşurări şi coeficientul de cuplaj k.

Spirele celor două înfăşurări sînt dispuse ordonat pe miezul magnetic. Fluxul magnetic creat de curentul din oricare din cele două bobine traversează toate spirele celeilalte înfăşurări.

Inductivitatea mutuală este:

$$M = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{N_2 \Phi_{f1}}{i_1} \qquad (4.62)$$

în care Φ_{21} este fluxul magnetic total care traversează a doua bobină, creat însă de curentul din prima bobină i_1. Φ_{f1} este fluxul fascicular creat de curentul i_1 în prima bobină. Curentul i_1 trecînd prin prima bobină dă naştere unei inducţii magnetice

$$B = \mu_o H = \mu_o \frac{N_1 i_1}{l_{med}}$$

în care : $N_1 i_1$ reprezintă solenaţia primei bobine şi $l_{med} = \pi D$ reprezintă lungimea liniei mijlocii a torului.

Fluxul magnetic prin miezul torului va fi:

$$\Phi_{f1} = B A = \mu_o \frac{N_1 i_1}{l_{med}} A = \mu_o \frac{N_1 i_1 A}{\pi D}$$

Rezultatele obţinute cu ajutorul acestei formule vor fi cu atît mai precise cu cît diametrul D va fi mai mare în raport cu dimensiunile transversale ale torului.

Introducînd expresia lui Φ_{f1} în (4.62) rezultă

$$M = \frac{N_2 \Phi_{f1}}{i_1} = \mu_o \frac{N_1 N_2}{\pi D} A ;$$

înlocuind :

$$M = 4 \pi \cdot 10^{-7} \frac{2.000 \cdot 4.000}{\pi \cdot 0,1} 4.10^{-4} = 12,8 \cdot 10^{-3} H =$$

$$12,8 \text{ m H.}$$

Coeficientul de cuplaj.

In expresia: $$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

se înlocuieşte $$M = \mu_o \frac{N_1 N_2}{\pi D} A$$

$$L_1 = \mu_o \frac{N_1^2}{\pi D} A \text{ şi } L_2 = \mu_o \frac{N_2^2}{\pi D} A .$$

Se obţine $$k = \frac{\mu_o \frac{N_1 N_2}{\pi D} A}{\sqrt{\mu_o \frac{N_1^2}{\pi D} A \; \mu_o \frac{N_2^2}{\pi D} A}} = 1 .$$

Cuplajul este perfect.

4.9. Legea inducţiei electromagnetice

Apariţia unei tensiuni electromotoare într-un circuit, ca urmare a modificării în timp a cîmpului magnetic, a fost descoperită în 1831 de fizicianul englez Michael Faraday (1791 - 1867).

Fenomenul s-a numit fenomenul inducţiei electromagnetice.

Experienţa demonstrează că efectul de inducţie poate apare în două forme: prin modificarea în timp a cîmpului, respectiv fluxului magnetic, sau prin schimbarea poziţiei conductorului electric în cîmpul magnetic-constant în timp.

Tensiunea electromotoare se induce în orice fel de circuit dar pentru a fi pusă în evidenţă prezenta sa, se foloseşte un conductor electric închis printr-un instrument de măsură, un galvanometru. Tensiunea electromotoare indusă generează un curent electric pus în evidenţă de galvanometru. Acest curent se numeşte curent electric indus.

Experimental se procedează astfel:

a) Variaţia în timp a fluxului magnetic (Fig. 4.43)

Dacă se apropie sau se depărtează un magnet permanent sau un electromagnet alimentat în curent continuu-de o spiră conductoare fixă, legată la un

galvanometru, acul indicator al acestuia va devia într-un sens sau în celălalt sens ceeace indică prezenţa în circuit a unui curent electric.

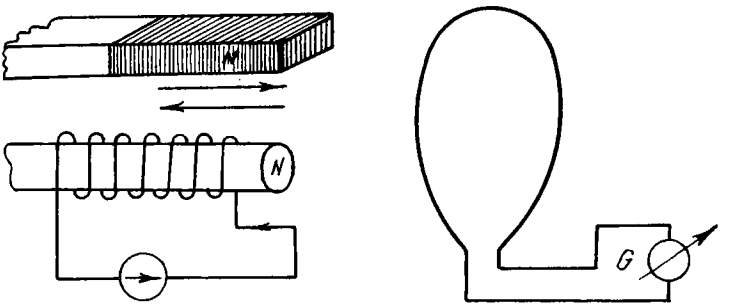


Fig. 4.43. Variaţia în timp a fluxului magnetic.

b) Schimbarea poziţiei conductorului electric în cîmp magnetic (Fig. 4.44). In acest caz, circuitul electric se compune din trei conductoare pe care se deplasează cu viteza $\bar{v}$ un alt conductor.

Pe conturul închis, desenat punctat în figură, se va naşte un curent indus dacă planul şinelor formează un unghi diferit de zero cu liniile cîmpului magnetic omogen de inducţie $\bar{B}$.

Se poate imagina şi altă experienţă; dacă se consideră două bobine vecine cuplate magnetic şi printr-o bobină trece un curent variabil în timp se constată că în bobina doua apare o tensiune electromotoare indusă. Această realizare se întîlneşte în practică la transformatorul electric.

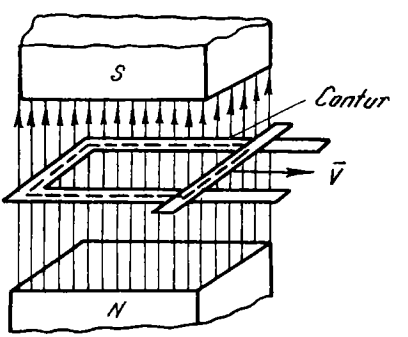


Fig. 4.44. Schimbarea poziţiei conductorului electric.

Generalizînd observaţiile experimentale, se poate preciza că la orice suprafaţă mărginită de un contur, străbătută de un flux magnetic variabil în timp, se constată că în lungul conturului apare o tensiune electromotoare indusă. Tensiunea electromotoare indusă este diferită de zero indiferent dacă conturul este realizat dintr-un material conductor sau nu; cînd conturul este realizat dintr-un material izolant curentul este zero.

Măsurări exacte demonstrează că tensiunea electromotoare indusă este proporţională cu scăderea în timp a fluxului care străbate circuitul de măsură.

Se scrie astfel:

$$e = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} . \qquad (4.63)$$

Enunţul este următorul:

Tensiunea electromotoare indusă în lungul unui contur este egală cu viteza de scădere a fluxului magnetic prin orice suprafaţă care se sprijină pe contur.

Fluxul Φ şi tensiunea electromotoare e au sensuri de referinţă asociate după regula burghiului drept (Fig. 4.45).

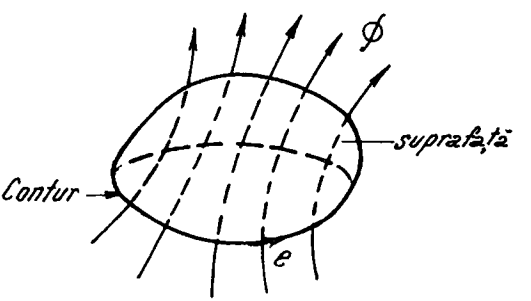


Fig. 4.45. Sensul fluxului Φ şi al tensiunii electromotoare se asociază după regula burghiului drept.

4. 9. 1. Regula lui Lenz

Referitor la sensul curentului indus H.F.E. Lenz în 1833 a formulat următoarea regulă:

Curentul indus are un astfel de sens încît, prin cîmpul magnetic pe care-l produce, se opune variaţiei în timp a fluxului magnetic inductor.

Din experienţele prezentate, s-a concluzionat că variaţia fluxului magnetic se produce datorită variaţiei în timp a cîmpului magnetic sau datorită mişcării conturului în cîmp magnetic constant sau pe ambele căi.

In primul caz, se manifestă fenomenul de inducţie electromagnetică prin transformare iar în cazul al doilea avem fenomenul de inducţie electromagnetică prin mişcare.

4. 9. 2. Inducţia magnetică prin transformare

Se consideră două bobine cuplate magnetic, plasate pe acelaşi miez magnetic. (Fig. 4. 46, a).

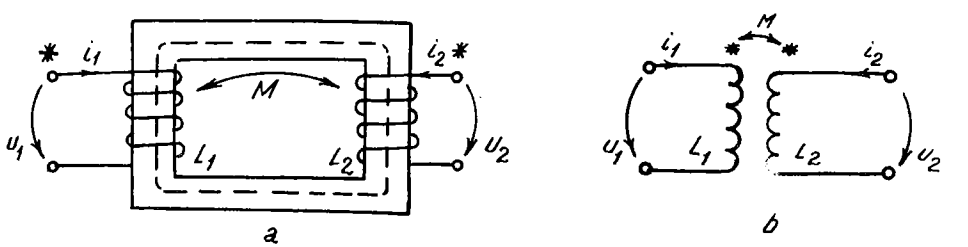


Fig. 4. 46. Bobine cuplate magnetic.
a) plasate pe miezul magnetic. b) reprezentare în scheme electrice.

Inductivităţile proprii ale celor două bobine sînt:

$$L_{11} = L_1 \quad \text{şi} \quad L_{22} = L_2 \tag{4.64}$$

Inductivitatea mutuală dintre bobine este:

$$L_{12} = L_{21} = M \ . \tag{4.65}$$

Bobinele sînt parcurse de curenţii i_1 şi i_2, variabili în timp. Cei doi curenţi vor genera fluxurile magnetice Φ_1 şi Φ_2 care vor avea acelaşi sens în miezul magnetic.

Expresia matematică va fi:

$$\Phi_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2 = L_1 i_1 + M i_2 \tag{4.66}$$

$$\Phi_2 = L_{12} i_1 + L_{22} i_2 = Mi_1 + L_2 i_2 \tag{4.67}$$

Tensiunile electromotoare induse în spire vor fi:

$$e_1 = - \frac{\Delta \Phi_1}{\Delta t} \quad \text{şi} \quad e_2 = - \frac{\Delta \Phi_2}{\Delta t} \tag{4.68}$$

Dacă se înlocuieşte cu expresiile fluxurilor Φ_1 şi Φ_2 de mai sus, se obţine:

$$e_1 = - L_1 \frac{\Delta i_1}{\Delta t} - M \frac{\Delta i_2}{\Delta t} = e_{11} + e_{12} \tag{4.69}$$

$$e_2 = - M \frac{\Delta i_1}{\Delta t} - L_2 \frac{\Delta i_2}{\Delta t} = e_{21} + e_{22} \tag{4.70}$$

Tensiunile electromotoare e_{11} şi e_{22} generate de curenţii variabili în timp din cele două bobine se numesc tensiuni electromotoare de autoinducţie.

Tensiunile electromotoare e_{12} şi e_{21} stabilite în cele două bobine şi generate de curentul variabil din cealaltă bobină, se numesc tensiuni electromotoare de inducţie mutuală. Dacă u_1 şi u_2 sînt tensiunile la bornele bobinelor şi dacă se neglijează căderile de tensiune din rezistenţele electrice ale celor două bobine, atunci se poate scrie:

$$u_1 = - e_1 \quad \text{şi} \quad u_2 = - e_2 \tag{4.71}$$

Bobinele cuplate magnetic se reprezintă în schemele electrice ca în Fig. 4.46 b. Steluţele indică pentru fiecare bobină, borna de intrare a curentului pentru care cîmpurile magnetice au acelaşi sens în circuitul magnetic comun (borne polarizate).

Acest ansamblu de două bobine înfăşurate pe un miez magnetic comun constituie un transformator electric.

Raportul tensiunilor la bornele înfăşurărilor reprezintă raportul de transformare:

$$\frac{u_1}{u_2} = n . \tag{4.72}$$

Se demonstrează că raportul de transformare este egal cu raportul numărului de spire:

$$n = \frac{N_1}{N_2} = \frac{u_1}{u_2} \tag{4.73}$$

4.9.3. Inducţia magnetică prin mişcare

Fenomenul de inducţie magnetică se constată şi în cazul în care se deplasează conductorul într-un cîmp magnetic uniform şi omogen. După cum s-a prezentat anterior, pe un sistem de trei conductoare fixe în cîmpul magnetic se deplasează alunecînd pe acestea al patrulea conductor (Fig.4.47). Cîmpul magnetic uniform de inducţie $\bar{B}$ este perpendicular pe planul şinelor.

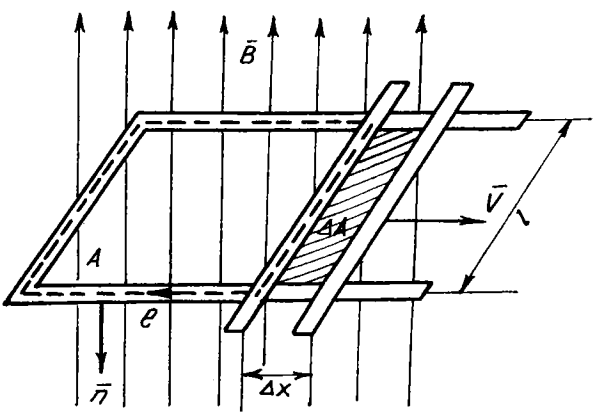


Fig. 4.47. Deplasarea conductorului electric cu viteza $\bar{v}$ în cîmp magnetic.

Suprafaţa A, străbătută de inducţia magnetică $\bar{B}$, se modifică în timp.

Astfel, la timpul t, suprafaţa este A iar la timpul $t + \Delta t$, suprafaţa a devenit $A + \Delta A$. Această creştere a suprafeţei s-a produs în urma deplasării conductorului mobil pe distanţa Δx. Odată cu creşterea suprafeţei cu ΔA, corespunzător va creşte şi fluxul magnetic de la valoarea Φ la timpul t, la valoarea $\Phi + \Delta\Phi$ corespunzător timpului $t + \Delta t$.

Se poate scrie că:

$$\Delta\Phi = \bar{B}\,\bar{n}\,(A + \Delta A) - \bar{B}\,\bar{n}\,A = \bar{B}\,\bar{n}\,\Delta A \qquad (4.74)$$

In această expresie, $\bar{n}$ reprezintă vectorul de orientare al suprafeţei A. Fiind vector unitar, modulul său va fi: $|\bar{n}| = 1$.

Cum $\bar{B}$ şi $\bar{n}$ sînt antiparalele rezultă:

$$\Delta\Phi = B.1.\Delta A \cos 180^{o} = - B\Delta A \qquad (4.75)$$

dar $\Delta A = l\,\Delta x$

cum $\Delta x = v\,.\,\Delta t$ rezultă

$$\Delta A = l\,v\,\Delta t$$

sau

$$\Delta\Phi = - B\,l\,v\,\Delta t \qquad (4.76)$$

Inlocuind pe $\Delta\Phi$ în expresia legii inducţiei electromagnetice $\left(e = - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right)$ se obţine:

$$e = - \frac{- B\,l\,v\,\Delta t}{\Delta t} \quad \text{sau}$$

$$e = B\,l\,v\,. \qquad (4.77)$$

Notă: Dacă inducţia $\bar{B}$ formează cu vectorul viteză $\bar{v}$ unghiul α, atunci

$$e = B\,l\,v \sin\alpha. \qquad (4.78)$$

In conturul format din conductoarele fixe şi conductorul mobil (linie punctată), se naşte un curent.

Acest curent generează la rîndul său un cîmp magnetic care se opune cîmpului inductor respectiv creşterii fluxului magnetic.

4.9.4. Aplicaţie. Se consideră un cadru compus din N spire şi de formă pătrată care se roteşte cu viteza unghiulară ω într-un cîmp magnetic uniform de inducţie magnetică $\bar{B}$ (Fig. 4.48).

Să se determine relaţia dintre tensiunea electromotoare indusă şi unghiul de rotaţie α al cadrului mobil.

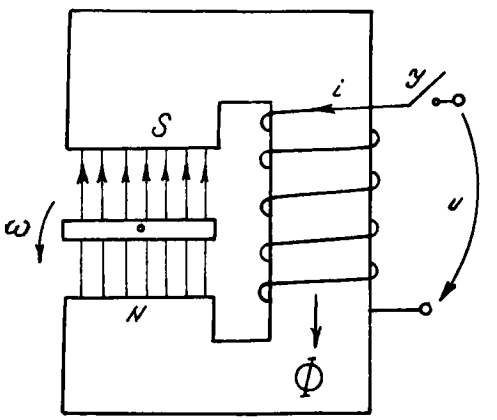


Fig. 4.48. Cadru cu N spire se roteşte într-un cîmp magnetic uniform.

Să se reprezinte grafic această relaţie.

Date:

- latura cadrului l = 25 cm ;
- viteza unghiulară ω = 314 rad/s ;
- inducţia magnetică B = 0,05 T ;
- numărul de spire al cadrului mobil N = 20 spire.

Rezolvare. Cadrul se compune din N=20 contururi pătrate care se află în condiţii identice în raport cu cîmpul magnetic.

Aceasta permite determinarea tensiunii electromotoare induse într-un contur şi apoi multiplicarea cu N = 20 pentru aflarea t.e.m induse în cadru.

Intr-o poziţie oarecare a cadrului mobil, pe care am notat-o cu b (Fig. 4.49), în conductorii 1 şi 2 ai cadrului, paraleli cu axa de rotaţie 00_1, se induc tensiunile electromotoare:

$e_1 = e_2 = B\ v\ l \sin \alpha$, în care unghiul α este format de inducţia magnetică $\bar{B}$ şi viteza $\bar{V}$.

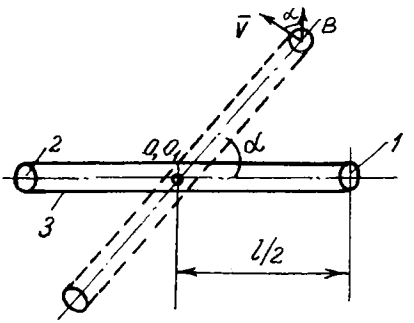


Fig. 4.49. Poziţia b (punctată) a cadrului mobil.

Tensiunile electromotoare e_1 şi e_2 au sensurile determinate de regula burghiului drept (Fig. 4.50) şi sînt adiţionale.

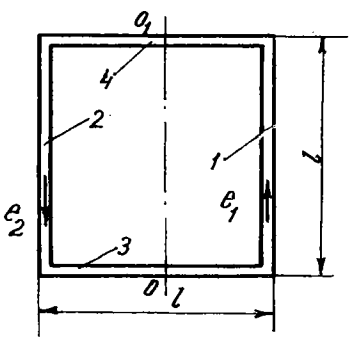


Fig. 4.50. Sensurile tensiunilor electromotoare e_1 şi e_2.

In laturile 3 şi 4 nu se induc tensiuni electromotoare deoarece nu taie liniile de cîmp magnetic, astfel că:

$$e_3 = e_4 = 0 .$$

Se obţine tensiunea electromotoare într-un contur:

$$e_c = e_1 + e_2 = 2\ B\ v\ l \sin\alpha = 2\ B\omega\frac{1}{2} l^2 \sin\alpha$$

$$= B\ l^2 \omega \sin\alpha = B\ A\omega \sin\alpha \qquad (4.78)$$

Dar B A reprezintă valoarea maximă a fluxului care trece prin contur adică

$$\Phi_m = B\ A ,$$

Se obţine:

$$e_c = \Phi_m\ \omega \sin\alpha .$$

Pentru cadrul întreg

$$e = Ne_c = N\ \Phi_m\ \omega \sin\alpha . \qquad (4.79)$$

Tensiunea maximă indusă în cadru E_m se obţine pentru $\sin\alpha = 1$ adică pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Rezultă

$$E_m = N\ \Phi_m\ \omega \sin\frac{\pi}{2} = N\ \Phi_m\ \omega = NBA\omega \qquad (4.80)$$

sau: $e = E_m \sin\alpha$, respectiv $\alpha = \omega t$;

se obţine:

$$e = E_m \sin\omega t. \qquad (4.81)$$

Inlocuind cu datele problemei, rezultă:

$$E_m = N \Phi_m \omega = N \; B \; A \; \omega = 20 \; . \; 0,05 \; . \; 0,25^2 . 314 =$$

Graficul $= 19,6$ V

$$e = E_m \sin \alpha = 19,6 \sin \alpha = 19,6 \sin \omega t \qquad (4.82)$$

se reprezintă pe baza datelor din Tabelul 4.2. determinate cu relaţia (4.82) pentru diferite valori ale unghiului α.

Tabelul 4.2

$\alpha = \omega t$	0^o	30^o	60^o	90^o	120^o	150^o	180^o
sin α	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5	0
e (V)	0	9,8	17	19,6	17	9,8	0

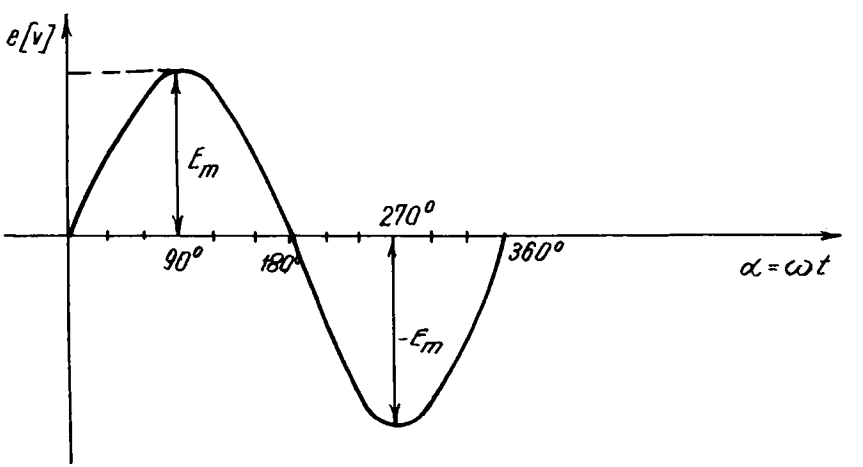


Fig. 4.51.

Datele din Tabelul 4.2 corespund semiundei pozitive. Pentru semiunda negativă (α cuprins între 180 şi 360^o), valorile tensiunii electromotoare e din Tabel vor fi negative.

4.10. Curenţi turbionari

Intr-o piesă metalică masivă plasată într-un cîmp magnetic variabil sau cînd piesa se deplasează într-un cîmp magnetic constant, se induc tensiuni electromotoare. Aceste tensiuni vor genera curenţi electrici cunoscuţi sub numele de curenţi turbionari sau curenţi Foucault (fig. 4.52).

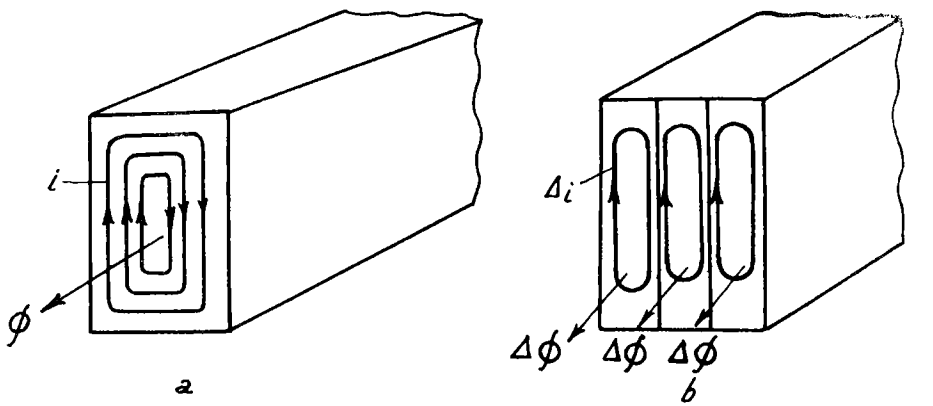


Fig. 4.52. Curenţii turbionari induşi: a. într-o piesă metalică; b. în tole metalice.

In aplicaţiile tehnice, aceşti curenţi sînt întîlniţi în părţile magnetice ale maşinilor şi aparatelor electrice. Din cauza pierderilor prin efectul Joule, se urmăreşte micşorarea acestor curenţi turbionari. Se îmbunătăţesc astfel parametrii de funcţionare.

Tot în tehnică se întîlnesc aplicaţii utile ale curenţilor turbionari. Astfel, tratamentele termice prin curenţi de înaltă frecvenţă, topirea metalelor în cuptoare de inducţie, frînele electromagnetice sînt exemple de astfel de aplicaţii utile.

In aparatele electrice şi în maşinile electrice se micşorează curenţii prin reducerea secţiunii miezului magnetic respectiv prin confecţionarea miezurilor magnetice din tole de 0,35 sau 0,5 mm izolate între ele cu lac sau hîrtie. Pentru a diminua şi mai mult valoarea curenţilor induşi, tola se realizează din fier silicios cu cca 4% siliciu. Prezenţa siliciului provoacă creşterea rezistivităţii electrice a materialelor magnetice fără ai diminua calităţile magnetice.

O altă cale de diminuare a curenţilor induşi în miezurile magnetice la frecvenţe medii constă în confecţionarea miezului din pulberi feromagnetice presate împreună cu un material liant electroizolant.

Pierderile prin efect caloric al curenţilor turbionari se determină cu expresia:

$$P_{Fe} = \sigma_{Fe} (fB\Delta)^2 \quad (W/kg) \qquad (4.83)$$

în care:

f este frecvenţa de variaţie a cîmpului magnetic în Hz;

B - valoarea maximă a inducţiei magnetice în T;

Δ - grosimea tolelor în m;

σ_{Fe} - coeficient de pierderi cuprins între 2,2 şi 4,8, corespunzător calităţii tolelor.

4.11. Efectul Hall

Asupra corpurilor conductoare şi semiconductoare plasate într-un cîmp magnetic, se constată efecte galvanometrice.

Astfel, în 1856, W. Thomson descoperă primul efect galvanometric ; modificarea rezistenţei electrice a unor conductoare în prezenţa cîmpului magnetic. Aplicaţia practică a acestui efect o constituie măsurarea inducţiei magnetice cu ajutorul spiralei de bismut.

Totuşi, cel mai important efect galvanometric îl constituie efectul Hall descoperit în 1879 de fizicianul E.H.Hall. Efectul constă în apariţia unei tensiunii - tensiunea Hall - între două puncte ale unei plăci conductoare sau semiconductoare prin care trece un curent electric cînd este plasată într-un cîmp magnetic, de inducţie $\bar{B}$. (fig. 4.53). Plăcuţa se mai numeşte şi sondă Hall.

La plăcuţele semiconductoare, efectul Hall este mult mai pronunţat.

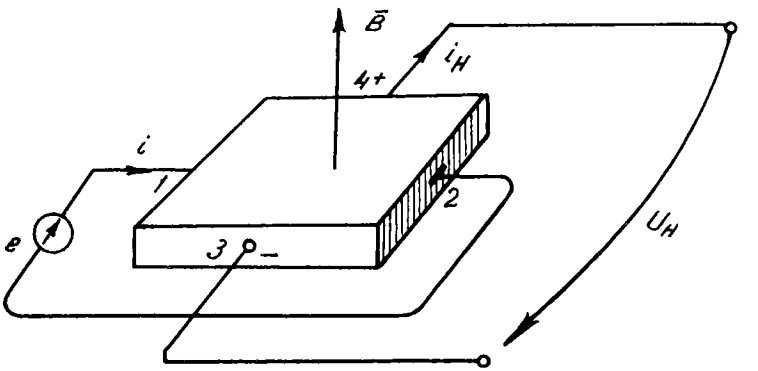


Fig. 4.53. Sondă Hall

Pentru a fi utilizată-mai ales la măsurarea inducţiei $\bar{B}$ - sonda Hall este prevăzută cu doi electrozi plaţi 1 şi 2 pentru curentul de comandă i şi doi electrozi punctuali 3 şi 4 pentru preluarea tensiunii Hall - U_H - şi care se poate măsura apoi cu un instrument de măsură.

Se demonstrează că tensiunea Hall:

$$u_H = K_H \, iB \qquad (4.84)$$

în care:

K_H reprezintă constanta Hall şi depinde de natura materialului sondei şi dimensiunile sale geometrice;

i - curentul de comandă;

B - inducţia magnetică.

4.12. Energia din cîmpul magnetic

S-a constatat că în cîmpul magnetic se exercită forţe asupra sarcinilor electrice, curenţilor electrici sau asupra corpurilor magnetizate. Aceste forţe pot efectua în lucru mecanic atunci cînd corpurile se deplasează în cîmpul magnetic. Cum orice sistem capabil să efectueze lucru mecanic posedă energie, se poate afirma că în cîmpul magnetic este localizată energie.

Problema este să determinăm expresia acestei energii magnetice.

In acest scop se va studia circuitul electric din fig. 4.54. şi se va determina energia magnetică acumulată de bobina L.

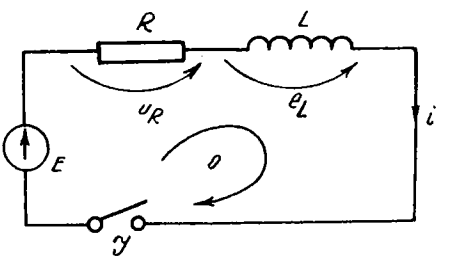


Fig. 4.54. Circuit electric pentru determinarea energiei magnetice.

Cînd se închide întreruptorul $\mathcal{J}$, curentul i creşte în timp de la valoarea zero pînă la valoarea

$$I = \frac{E}{R}$$

care este constantă.

La un moment t, se scrie pe ochiul o cu teorema a doua a lui Kirchhoff ecuaţia:

$$u_R = E + e_L \qquad (4.85)$$

în care $u_R = Ri$ reprezintă căderea de tensiune la bornele rezistorului R şi

$$e_L = - L \frac{\Delta i}{\Delta t} \qquad (4.86)$$

este tensiunea electromotoare indusă prin transformare deoarece curentul care trece prin bobina cu inductivitatea proprie L este variabil.

Se scrie:

$$E = Ri + L \frac{\Delta i}{\Delta t} \tag{4.87}$$

în care Δi este variaţia curentului i în timpul foarte scurt Δt.

Dacă se înmulţeşte ecuaţia de mai sus în $i\Delta t$ se obţine:

$$Ei\Delta t = Ri^2\Delta t + Li\Delta i \ . \tag{4.88}$$

Dar

$$Li\Delta i = L \frac{\Delta i^2}{2} = \Delta \left(\frac{1}{2} Li^2\right) \tag{4.89}$$

Demonstraţie:

$$\Delta i^2 = (i + \Delta i)^2 - i^2 = i^2 + 2\, i\Delta i + (\Delta i)^2 - i^2 \simeq 2i\Delta i$$

sau:

$$i\,\Delta i = \frac{\Delta i^2}{2}$$

S-a neglijat $(\Delta i)^2$ care este foarte mic în comparaţie cu $2i\Delta i$.

Deci

$$Ei\,\Delta t = Ri^2\Delta t + \Delta \left(\frac{1}{2} L\, i^2\right)$$

Termenul $Ei\,\Delta t$ reprezintă energia cedată rezistenţei R şi bobinei L în timpul Δt.

Energia cedată rezistenţei R este $Ri^2 \Delta t$. Aceasta se transformă în căldură prin efect Joule.

Termenul $\Delta(\frac{1}{2} Li^2)$ reprezintă variaţia energiei localizate în cîmpul magnetic în intervalul de timp Δt cînd curentul creşte de la valoarea i la $i + \Delta i$.

Se notează cu:

$$\Delta W_m = \Delta(\frac{1}{2} Li^2) \tag{4.90}$$

sau

$$W_m = \frac{1}{2} Li^2 \tag{4.91}$$

Dar considerînd expresia fluxului dintr-o bobină

$$\Phi = Li \tag{4.92}$$

se obţin următoarele expresii echivalente ale energiei localizate în cîmpul magnetic al bobinei:

$$W_m = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \Phi i = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L} \tag{4.93}$$

Expresiile energiei localizată în cîmpul magnetic sînt valabile pentru orice fel de bobină. Energia magnetică a oricărei bobine depinde numai de valoarea fluxului magnetic şi intensitatea curentului la un moment dat.

Aplicaţie

Să se determine energia magnetică localizată într-o bobină cu inductivitatea proprie L = 0,1 H, străbătută de curentul I = 10 A.

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} 0,1 \cdot 10^2 = 5 \text{ J}$$

4.13. Densitatea de volum a energiei magnetice

Expresia densităţii de volum a energiei magnetice se va determina într-un caz particular, cazul unui solenoid lung de lungime l, aria secţiunii transversale a miezului A, permeabilitatea magnetică μ şi numărul de spire al solenoidului N.

In expresia energiei magnetice (4.93)

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L}$$

se înlocuieşte

$$\Phi = N \Phi_f = N B A$$

şi

$$L = \mu \frac{N^2 A}{l} \quad \text{vezi (4.49).}$$

Deci:

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{N^2 B^2 A^2}{\mu \frac{N^2 A}{l}} = \frac{B^2}{2\mu} Al = \frac{B^2}{2\mu} V \qquad (4.94)$$

în care V = Al reprezintă volumul solenoidului.

Dacă se raportează energia magnetică W_m la volumul V, se obţine densitatea de volum a energiei magnetice.

Aceasta reprezintă de altfel energia magnetică din unitatea de volum Adică

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{B^2}{2\mu} \cdot \qquad (4.95)$$

Dar

$$B = \mu H \, .$$

Prin înlocuire se obţin expresiile echivalente:

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{B\,H}{2} = \mu \frac{H^2}{2} \qquad (4.96)$$

Precizări:

a. Pentru inducţie B = const., densitatea energiei magnetice este cu atît mai mare cu cît μ este mai mic. De exemplu, în cazul electromagnetului din fig. 4.33. densitatea energiei magnetice în întrefier

$$w_{m\Delta} = \frac{B^2}{2\mu_o} \qquad (4.96\ a)$$

este mai mare ca densitatea energiei magnetice din fier:

$$w_{m\ Fe} = \frac{B^2}{2\mu} \qquad (4.96\ b)$$

deoarece permeabilitatea magnetică a miezului de fier μ este mai mare ca permeabilitatea magnetică a întrefierului μ_o, timp în care inducţia magnetică în miez este egală cu inducţia magnetică în întrefier.

Acesta este un motiv pentru care în calcule, energia magnetică localizată în miezul de fier se neglijează în raport cu energia magnetică localizată în întrefier.

b. In cîmpul magnetic se localizează mai multă energie în raport cu cîmpul electric.

4.14. Forţa în cîmpul magnetic

Expresia forţei care ia naştere în cîmpul magnetic se va determina în cazul particular al unui electromagnet (fig. 4.55). Se va determina forţa cu care electromagnetul acţionează asupra armăturii mobile.

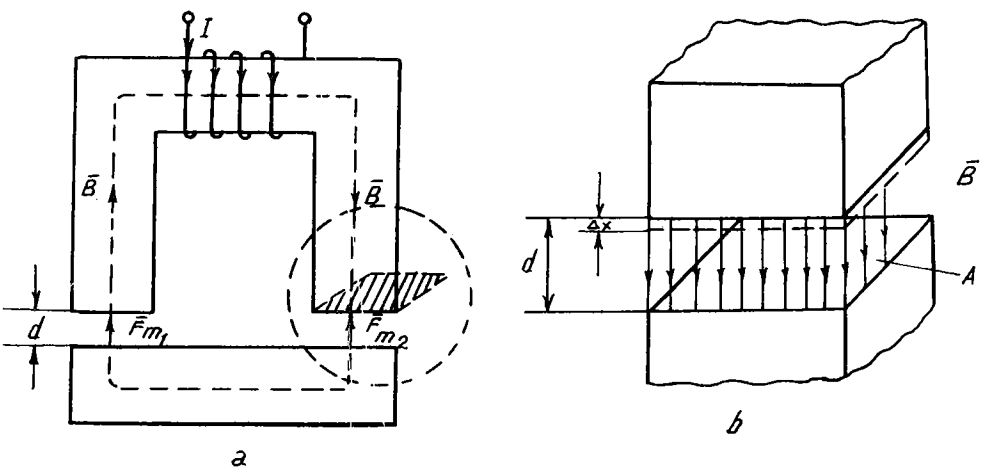


Fig. 4.55. Forţa din cîmpul magnetic al unui electromagnet.

Se notează cu d distanţa dintre armătura mobilă şi armătura fixă (întrefierul).

Lucrul mecanic elementar efectuat pe distanţa Δx (fig. 4.55 b) se realizează pe seama energiei localizată în cîmpul magnetic din întrefierul d. Această energie va scade odată cu micşorarea întrefierului:

$$\Delta x \sum_{k=1}^{n} F_{rak} = - \Delta W_m = - (W_{mfinal} - W_{miniţial}) \qquad (4.97)$$

S-a notat cu F_{mk} - forţa portantă a polului k iar n numărul de poli. In acest caz n = 2.

Calculul energiei magnetice W_m.

In expresia (4.93):

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L}$$

Se va înlocui fluxul magnetic Φ cu expresia

$$\Phi = N\Phi_f = N\ B\ A \tag{4.98}$$

iar inductivitatea electromagnetului va fi

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{N\Phi_f}{i} = \frac{N\ B\ A}{i} \cdot \tag{4.99}$$

Dar

$$Ni = H_{Fe}\ l_{Fe} + H_o\ d$$

respectiv

$$i = \frac{H_{Fe}\ l_{Fe} + 2\ H_o\ d}{N} \tag{4.100}$$

In această expresie, intensităţile cîmpului magnetic sînt:

$H_{Fe} = \mu B$ - intensitatea cîmpului magnetic în fier;

$H_o = \mu_o B$ - intensitatea cîmpului magnetic în întrefier;

l_{Fe} - lungimea medie a liniei de cîmp magnetic în fier.

Se fac înlocuirile în expresia (4.99) şi se obţine:

$$L = \frac{N\,B\,A}{\frac{H_{Fe}\,l_{Fe} + 2\,H_o\,d}{N}} = \frac{N^2\,B\,A}{\frac{B}{\mu}\,l_{Fe} + 2\,\frac{B}{\mu_o}\,d} \tag{4.101}$$

sau:

$$L = \frac{N^2\,A}{\frac{l_{Fe}}{\mu} + 2\,\frac{d}{\mu_o}} \tag{4.102}$$

Dar permeabilitatea magnetică în fier μ este mult mai mare ca permeabilitatea magnetică în vid μ_o.

Din acest motiv:

$$\frac{l_{Fe}}{\mu} \ll \frac{d}{\mu_o}$$

şi se neglijează $\frac{l_{Fe}}{\mu}$.

Rezultă:

$$L = \mu_o\,\frac{N^2\,A}{2\,d} \tag{4.103}$$

Dacă se înlocuieşte (4.98) şi (4.103) în expresia energiei magnetice rezultă:

$$W_m = \frac{1}{2}\,\frac{N^2\,B^2\,A^2}{\frac{\mu_o\,N^2\,A}{2\,d}} = \frac{B^2}{\mu_o}\,A\,d \tag{4.104}$$

Variaţia energiei ΔW_m va fi conform (4.97)

$$\Delta W_m = W_{m\ final} - W_{m\ iniţial} =$$

$$= \frac{B^2}{\mu_o} A (d - \Delta x) - \frac{B^2}{\mu_o} A d = - \frac{B^2 A}{\mu_o} \Delta x \qquad (4.105)$$

S-a considerat $W_m = W_{m\ iniţial}$.

Pentru k = 2 poli (electromagnetul din fig. 4.55) expresia (4.97) devine:

$$(F_{m1} + F_{m2}) \Delta x = - (W_{m\ final} - W_{m\ iniţial}) = - \Delta W_m \qquad (4.106)$$

Cum

$$F_{m1} = F_{m2} = F_m$$

Rezultă:

$$2 F_m \Delta x = \frac{B^2 A}{\mu_o} \Delta x$$

sau

$$F_m = \frac{B^2}{2 \mu_o} A \qquad (4.107)$$

F_m reprezintă forţa portantă a electromagnetului dezvoltată pe unul din polii celor două armături (fixă şi mobilă).

Aplicaţie

Să de determine inducţia magnetică de sub polul unui electromagnet capabil să dezvolte o forţă F_m = 5 000 N, avînd aria secţiunii A = 3 dm^2.

Din

$$B = \sqrt{\frac{2\,\mu_o\,F_m}{A}}$$

rezultă

$$B = \sqrt{\frac{2.4.\pi.10^{-7}.5.10^{3}}{3.10^{-2}}} = 0,647\ T$$

CAPITOLUL 5

CURENTUL ALTERNATIV SINUSOIDAL

Descoperirea de Michael Faraday, în 1831, a fenomenului inducţiei electromagnetice, a determinat dezvoltarea rapidă şi multiplă a aplicaţiilor electricităţii în tehnică.

Astfel, în 1832, francezul Hippolyte Pixii (1808-1835) inventează primul generator de curent alternativ monofazat. Generatorul consta dintr-un magnet permanent care se rotea în faţa polilor unui electromagnet fix. La sugestia lui A.M. Ampère, inventatorul H.Pixii adaugă maşinii un comutator care permite obţinerea unui curent electric pulsatoriu.

Urmează după aceea o serie de invenţii şi aplicaţii care aveau ca scop producerea, transportul şi utilizarea energiei electromagnetice. Mărimile alternative sinusoidale: tensiunea şi curentul erau potrivite acestui scop.

Mărimile electromagnetice variabile în timp sînt întîlnite în domeniul electrocomunicaţiilor. Dezvoltarea acestui domeniu are la bază teoria cîmpului electromagnetic, fundamentată de fizicianul englez James Clark Maxwell în lucrarea sa "Tratat despre electricitate şi magnetism", apărută în 1873. Confirmarea experimentală a teoriei lui Maxwell a fost făcută mai tîrziu, în 1887, de fizicianul german Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894).

Acesta a demonstrat prima oară că electricitatea se poate transmite şi fără conductoare, prin intermediul undelor electromagnetice.

Primele încercări de generare şi detectare a undelor electromagnetice aparţin tot lui H.R.Hertz; în acest scop a creat aparatele denumite "oscilatorul" şi "rezonatorul" lui Hertz.

Mai tîrziu, în 1894, inginerul electrician rus Aleksandr Stepanovici Popov (1859-1905) emite ideea că undele electromagnetice - denumite şi hertziene - ar putea fi folosite pentru transmiterea semnalelor la distanţă în electrocomunicaţii. Chiar în 1895 la Societatea de Fizică din Petersburg, A.S.Popov prezintă „detectorul de furtuni", primul receptor de unde electromagnetice.

Aplicaţiile curenţilor alternativi se întîlnesc acum în multe domenii tehnice şi industriale. Principalul avantaj al curentului alternativ rămîne însă producerea sa simplă.

5.1. Generarea tensiunii electromotoare alternative sinusoidale. Curentul alternativ sinusoidal.

Tensiunea electromotoare alternativă sinusoidală se obţine prin fenomenul de inducţie electromagnetică, realizată în generatoare de tensiune alternativă instalate în centralele electrice. Principiul de funcţionare al unui generator de tensiune alternativă a fost prezentat în subcapitolul 4.9. „Legea inducţiei electromagnetice" (aplicaţie).

S-a demonstrat că tensiunea electromotoare indusă în cadru este:

$$e = NBA\ \omega\ \sin \omega t \quad (V) \qquad (5.1)$$

în care:

N - numărul de spire al cadrului;

B - inducţia magnetică (T);

A - suprafaţa cadrului (m^2);

ω - viteza unghiulară (rad/s).

Valoarea maximă a t.e.m. reprezintă mărimea:

$$E_m = NBA\,\omega \qquad (5.2)$$

şi nu depinde de forma geometrică a cadrului. Se măsoară în volţi.

Tensiunea indusă se poate scrie:

$$e = E_m \sin \omega t \qquad (5.3)$$

Valoarea instantanee reprezintă valoarea tensiunii electromotoare la un moment dat. In acest caz este e.

Curentul alternativ sinusoidal. Dacă se leagă capetele cadrului la două inele care alunecă pe două perii P_1 şi P_2, legate la rîndul lor cu un circuit exterior în care se află rezistenţa de sarcină R_s (fig. 5.1), atunci prin circuitul format, va trece curentul sinusoidal:

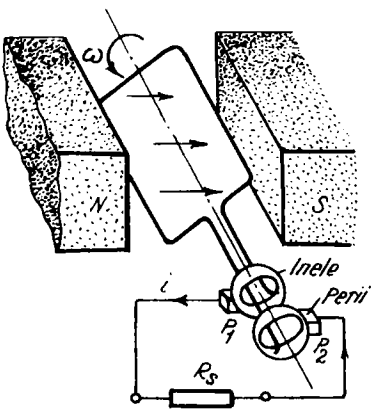


Fig. 5.1. Generator de tensiune alternativă.

$$i = \frac{e}{R} = \frac{E_m}{R} \sin \omega t \,. \qquad (5.4)$$

R reprezintă rezistenţa totală a circuitului formată din rezistenţa cadrului, rezistenţa de contact la perii, rezistenţa firelor de legătură şi rezistenţa de sarcină R_s.

Dacă se notează cu

$$I_m = \frac{E_m}{R}$$

valoarea maximă a curentului, vom avea expresia valorii instantanee:

$$i = I_m \sin \omega t \qquad (5.5)$$

Aplicaţie

Un cadru dreptunghiular se roteşte cu n = 120 rot /minut într-un cîmp magnetic uniform cu inducţia magnetică B = 0,8 T. Cadrul este o bobină formată din N = 25 spire. Suprafaţa cadrului este A = 4 cm^2 şi rezistenţa sa r = 0,1 Ω .

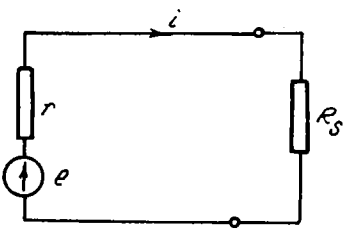


Fig. 5.2.

Se cere:

a. Expresia tensiunii electromotoare induse.

In

$$e = E_m \sin \omega t$$

se înlocuieşte:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = 2\pi \times 120 \frac{rot}{min} \times \frac{1}{60} \frac{min}{s} = 4\pi \text{ rad/s}$$

şi $$E_m = NBA\omega = 25 \times 0,8 \times 4.10^{-4} \times 4\pi = 0,1 \text{ V}$$

Rezultă:

$$e = 0,1 \sin 4\pi t \quad (V).$$

b. Curentul care trece prin circuit (fig. 5.2) avînd rezistenţa de sarcină:

$$R_s = 9,9\ \Omega ,$$

Se neglijează rezistenţa de contact la perii şi a firelor de legătură.

$$i = \frac{e}{r + R_s} = \frac{0,1}{0,1 + 9,9} \sin 4\pi t \quad (A)$$

sau

$$i = 10 \sin 4\pi t \quad (mA)$$

5.1.1. Mărime periodică. Perioadă. Frecvenţă. Pulsaţie.

Mărimea variabilă ale cărei valori se repetă după intervale egale de timp se numeşte mărime periodică.

Tensiunea electromotoare $e = E_m \sin \omega t$ şi curentul $i = I_m \sin \omega t$ sînt mărimi periodice (fig. 5.3).

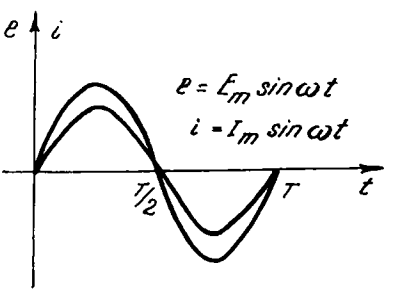


Fig. 5.3. Tensiunea electromotoare e şi curentul i sînt mărimi periodice.

După intervale egale de timp, curentul respectiv tensiunea capătă aceleaşi valori.

Mărimile sinusoidale sînt mărimi periodice. Se întîlnesc mărimi variabile în timp, periodice, şi de o altă formă. In electronică, există curentul în dinţi de fierăstrău (fig. 5.4).

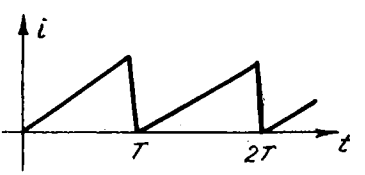


Fig. 5.4. Curent în dinţi de fierăstrău.

In tehnică de calcul, se foloseşte tensiune cu variaţie dreptunghiulară în timp (fig. 5.5).

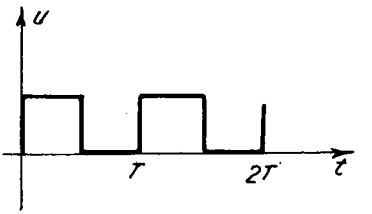


Fig. 5.5. Tensiune cu variaţie dreptunghiulară în timp.

Perioadă. Intervalul minim de timp după care se repetă, în aceiaşi ordine, valorile mărimii periodice, se numeşte perioadă. Se notează cu T.

Unitatea de măsură pentru perioadă este secunda (s) .

Frecvenţa unei mărimi periodice este raportul dintre un număr întreg de perioade şi intervalul de timp corespunzător acestui număr.

$$f = \frac{n}{nT} = \frac{1}{T} \text{ sau } f = \frac{1}{T} \qquad (5.6)$$

Unitatea de măsură pentru frecvenţă în SI se numeşte hertz (Hz) .

Reţelele electrice de transmitere şi distribuţie a energiei electrice în curent alternativ au frecvenţa standard de 50 Hz. Există şi frecvenţă de 60 Hz în alte ţări.

Pulsaţia sau frecvenţa unghiulară se defineşte prin relaţia matematică:

$$\omega = 2 \pi f \qquad (5.7)$$

în care:

f - frecvenţa.

Unitatea de măsură în SI este radian/secundă (rad/s) .

Intre pulsaţia ω , frecvenţa f şi perioada T există relaţiile:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \; ; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \; ; \quad \omega T = 2\pi \qquad (5.8)$$

Folosind aceste relaţii, expresia tensiunii electromotoare sau a curentului se poate scrie sub formele (se prezintă pentru t.e.m.):

$$e = E_m \sin \omega t = E_m \sin 2\pi ft = E_m \sin \frac{2\pi}{T} t \qquad (5.9)$$

5.1.2. Valoarea medie. Mărime alternativă. Valoarea efectivă.

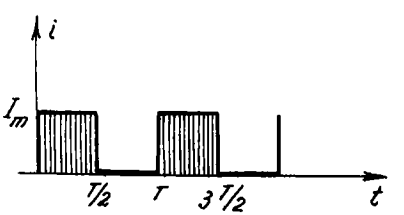
Valoare medie a mărimii periodice reprezintă raportul dintre suma algebrică a suprafeţelor determinate de curba care descrie mărimea periodică şi perioada corespunzătoare acestei mărimi.

Se notează cu literă mare şi indice "med" (Exemplu: U_{med}).

Mărime alternativă este mărimea periodică a cărei valoare medie este nulă.

Aplicaţia 1

Să se calculeze valoarea medie a curentului electric, mărime periodică de perioada T, reprezentată sub formă grafică în fig. 5.6.



Valoarea instantanee a curentului electric i variază astfel:

$$i = I_m \qquad \text{pentru } t \in (0, \frac{T}{2}),$$

$$i = 0 \qquad \text{pentru } t \in (\frac{T}{2}, T).$$

Valoarea medie a curentului se calculează pe o perioadă T:

$$I_{med} = \frac{I_m \frac{T}{2} + 0 \frac{T}{2}}{T} = \frac{I_m}{2}$$

Aplicaţia 2

Să se calculeze valoarea medie a tensiunii electrice, mărime periodică de perioadă T, reprezentată sub formă grafică în fig. 5.7.

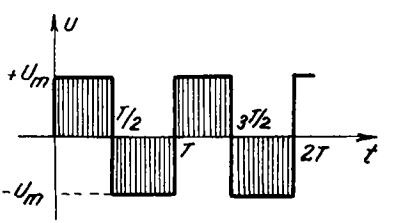


Fig. 5.7.

Valoarea instantanee a tensiunii electrice u variază astfel:

$$u = U_m \qquad \text{pentru } t \in (0, \frac{T}{2}),$$

$$u = 0 \qquad \text{pentru } t = 0; \frac{T}{2}; T,$$

$$u = -U_m \qquad \text{pentru } t \in (\frac{T}{2}, T).$$

Valoarea medie a tensiunii electrice se calculează pe o perioadă T:

$$U_{med} = \frac{U_m \frac{T}{2} - U_m \frac{T}{2}}{T} = \frac{0}{T} = 0$$

Mărime alternativă sinusoidală este mărimea alternativă a cărei variaţie în timp este de formă sinusoidală.

Exemplu: curentul alternativ sinusoidal a cărei valoare instantanee i variază sinusoidal în timp

$$i = I_m \sin \omega t .$$

Valoarea medie a mărimii alternative sinusoidale în timpul unei perioade este nulă.

Demonstraţie.

In fig. 5.8 este reprezentată grafic variaţia sinusoidală în timp a valorii instantanee a curentului:

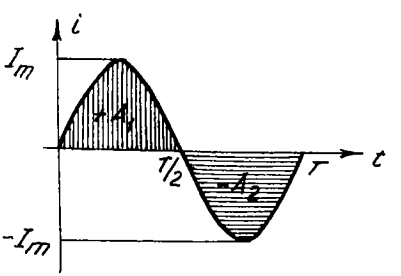


Fig. 5.8. Variaţia sinusoidală a lui i: $i = I_m \sin \omega t$

$$i = I_m \sin \omega t$$

Se notează cu $+ A_1$ suprafaţa pozitivă mărginită de curba $i=I_m \sin \omega t$ şi axa absciselor cuprinsă între 0 şi $\frac{T}{2}$.

Se notează cu - A_2, suprafaţa negativă mărginită de aceeaşi curbă şi axa absciselor cuprinsă între $\frac{T}{2}$ şi T.

Din motive de simetrie $A_1 = A_2 = A$ dar au semne contrare.

Conform definiţiei, valoarea medie a curentului pe o perioadă este:

$$I_{med} = \frac{+ A_1 - A_2}{T} = \frac{+ A - A}{T} = \frac{0}{T} = 0 \qquad (5.10)$$

NOTA:

Cu toate că reţelele de distribuţie şi folosire a energiei electromagnetice sînt de curent alternativ sinusoidal, uzual, sînt numite reţele de curent alternativ.

Aplicaţia 1

Să se calculeze valoarea medie a tensiunilor electrice, funcţiuni periodice de perioadă T, în raport cu timpul. Forma grafică este prezentată în fig. 5.9 şi fig. 5.10.

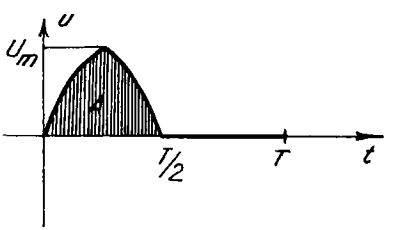


Fig. 5.9.

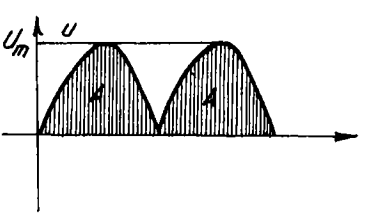


Fig. 5.10.

a. Valoarea instantanee a tensiunii electrice u variază astfel:

$$u = U_m \sin \frac{2\pi}{T} t \quad \text{pentru } t \in \left(0, \frac{T}{2}\right),$$

$$u = 0 \quad \text{pentru } t \in \left(\frac{T}{2}, T\right).$$

Valoarea medie se calculează pe perioada T.

$$U_{med} = \frac{\text{suprafaţa A}}{T}$$

Se demonstrează că suprafaţa A este:

$$\text{suprafaţa A} = \frac{TU_m}{\pi}$$

Rezultă:

$$U_{med} = \frac{\frac{TU_m}{\pi}}{T} = \frac{U_m}{\pi}$$

b. Valoarea instantanee a tensiunii electrice u variază astfel:

$$u = U_m \left| \sin \frac{2\pi}{T} t \right|$$

NOTA:

Scrierea între bare semnifică:

Pentru oricare valoare a lui t, $\left|\sin \frac{2\pi}{T} t\right|$ reprezintă valoarea absolută a lui $\sin \frac{2\pi}{T} t$ şi este mereu pozitivă.

Valoarea medie se calculează pe perioada T:

$$U_{med} = \frac{2 \text{ x supraf. A}}{T} = \frac{2\,\frac{TU_m}{\pi}}{T} = \frac{2\,U_m}{\pi}$$

Valoarea efectivă a mărimii periodice. La valoarea efectivă a unei mărimi periodice, s-a ajuns din considerente energetice. In acest scop s-a definit mai întîi valoarea efectivă a unui curent periodic. Aceasta este numeric egală cu intensitatea unui curent continuu care, străbătînd acelaşi rezistor ca şi curentul periodic, face să se dezvolte aceeaşi cantitate de căldură în timp de o perioadă.

Matematic se scrie:

$$RI^2T = R\sum_{(T)} i^2 \Delta t \quad \text{sau} \quad I = \sqrt{\frac{\sum_{(T)} i^2 \Delta t}{T}} \qquad (5.11)$$

Prin $\sum_{(T)} i^2 \Delta t$ se înţelege că suma este efectuată în intervalul de timp egal cu o perioadă;

I - reprezintă valoarea efectivă a curentului periodic;

R - rezistenţa electrică a rezistorului;

i - valoarea instantanee a mărimii periodice, în intervalul Δt;

T - perioada.

In aplicaţiile practice noţiunea de valoare efectivă (se mai numeşte şi eficace) se extinde asupra curenţilor şi tensiunilor.

Se notează cu literă mare de tipar (Ex.: U sau I).

Aplicaţia 1

Să se calculeze valoarea efectivă a următoarelor tensiuni electrice, funcţiuni periodice de perioadă T, în raport cu timpul (fig. 5.11 şi fig. 5.12).

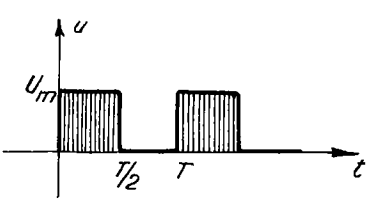


Fig. 5.11.

- Valoarea instantanee a tensiunii electrice u variază astfel:

$$u = U_m \qquad \text{pentru } t \in \left(0, \frac{T}{2}\right),$$

$$u = 0 \qquad \text{pentru } t \in \left(\frac{T}{2}, T\right).$$

Valoarea efectivă (sau eficace) a tensiunii electrice se calculează pe o perioadă T:

$$U = \sqrt{\frac{\sum\limits_{(T)} u^2 \Delta t}{T}} = \sqrt{\frac{U_m^2 \frac{T}{2} + 0 \frac{T}{2}}{T}} = \sqrt{\frac{U_m^2}{2}}$$

sau

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

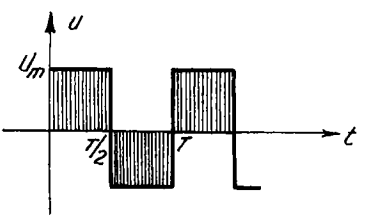


Fig. 5.12.

- Valoarea instantanee a tensiunii electrice u variază astfel:

$$u = U_m \qquad \text{pentru } t \in \left(0, \frac{T}{2}\right),$$

$$u = -U_m \qquad \text{pentru } t \in \left(\frac{T}{2}, T\right).$$

Valoarea efectivă a tensiunii electrice se calculează pe o perioadă T:

$$U = \sqrt{\frac{\sum_{(T)} u^2 \Delta t}{T}} = \sqrt{\frac{U_m^2 \frac{T}{2} + (-U_m)^2 \frac{T}{2}}{T}} = \sqrt{U_m^2} = U_m$$

Valoarea efectivă a mărimii sinusoidale. Se demonstrează că valoarea efectivă a unei mărimi alternative sinusoidale (Ex.: curentul alternativ sinusoidal) are următoarea expresie:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \qquad (5.12)$$

în care:

I - reprezintă valoarea efectivă a curentului alternativ sinusoidal;

I_m - reprezintă valoarea maximă a curentului sinusoidal.

Factor de formă al unei mărimi periodice. Se defineşte factorul de formă ca raportul dintre valoarea efectivă şi valoarea medie a unei mărimi periodice.

Se notează cu K_f.

$$K_f = \frac{\text{valoare efectivă}}{\text{valoare medie}} \qquad (5.13)$$

Ex. pentru un curent periodic:

$$K_f = \frac{I}{I_{med}} .$$

Factor de vîrf al unei mărimi periodice. Se defineşte factorul de vîrf ca raportul dintre valoarea maximă şi valoarea efectivă a unei mărimi periodice.

Se notează cu K_v:

$$K_v = \frac{\text{valoare maximă}}{\text{valoare efectivă}} \qquad (5.14)$$

5.1.3. Caracteristicile mărimilor sinusoidale

Expresia mărimii sinusoidale. Ex. pentru curent:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi) \qquad (5.15)$$

In fig. 5.13 este reprezentată sub formă grafică.

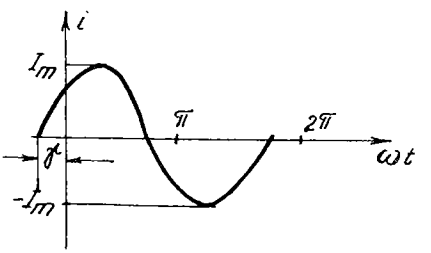


Fig. 5.13. Reprezentarea grafică a mărimii sinusoidale: $i=I_m \sin(\omega t+ \psi)$

Valoarea maximă I_m. Cea mai mare valoare instantanee. Se mai numeşte amplitudine.

Fază reprezintă argumentul sinusului adică unghiul $\omega t + \psi$. Unitatea de măsură: radian (rad).

Fază iniţială reprezintă valoarea fazei la momentul iniţial ($t = 0$). In cazul respectiv, faza iniţială este unghiul ψ. Notaţii folosite:

α - faza iniţială a unei tensiuni electromotoare;

β - faza iniţială a unei tensiuni electrice;

ψ - faza iniţială a unui curent electric.

Valoarea medie a mărimii sinusoidale, într-un interval de timp egal cu o perioadă, este nulă.

$$I_{med} = 0 \qquad (5.16)$$

Pentru o semiperioadă:

$$I_{med} = \frac{2\ I_m}{\pi} \qquad (5.16\ a)$$

Valoarea efectivă a mărimii sinusoidale este:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \qquad (5.17)$$

Din acest motiv, expresia mărimii sinusoidale,

$$i = I_m \sin\ (\omega t + \varphi)$$

se scrie:

$$i = \sqrt{2}\ I \sin\ (\omega t + \varphi) \qquad (5.18)$$

Pulsaţia mărimii sinusoidale este mărimea:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad (5.19)$$

Din acest motiv, expresia mărimii sinusoidale se pune şi sub forma:

$$i = \sqrt{2}\ I \sin\ (2\pi ft + \varphi) \qquad (5.20)$$

sau

$$i = \sqrt{2}\ I \sin\ (\frac{2\pi}{T} t + \varphi) \qquad (5.20\ a)$$

Factorul de formă al mărimii sinusoidale este:

$$K_f = \frac{I}{I_{med}} = \frac{\frac{I_m}{\sqrt{2}}}{\frac{2\,I_m}{\pi}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \qquad (5.21)$$

NOTA:

Factorul de formă K_f s-a calculat pentru o semiperioadă; pentru o perioadă nu are sens.

Factorul de vîrf al mărimii sinusoidale este:

$$K_v = \frac{I_m}{I} = \frac{I_m}{\frac{I_m}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \qquad (5.22)$$

Defazajul dintre două mărimi sinusoidale de aceeaşi pulsaţie ω :

$$i_1 = \sqrt{2}\ I_1 \sin(\omega t + \psi_1)$$

şi

$$i_2 = \sqrt{2}\ I_2 \sin(\omega t + \psi_2)$$

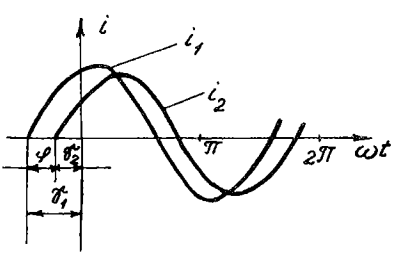


Fig. 5.14. Defazajul dintre două mărimi sinusoidale.

este egal cu diferenţa fazelor celor două mărimi (fig. 5.14):

$$\varphi = (\omega t + \psi_1) - (\omega t + \psi_2) = \psi_1 - \psi_2 \quad (5.23)$$

Se spune că, mărimea i_1 este defazată înaintea mărimii i_2 cu un unghi φ, respectiv mărimea i_2 este defazată în urma mărimii i_1 cu acelaşi unghi.

Distingem:

a. Mărimi în fază. Defazajul este zero: $\varphi = 0^0$ (fig. 5.15 a).

b. Mărimi în cuadratură. Defazajul este $\frac{\pi}{2}$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (fig. 5.15 b).

c. Mărimi în opoziţie. Defazajul este π ; $\varphi = \pi$ (fig. 5.15 c).

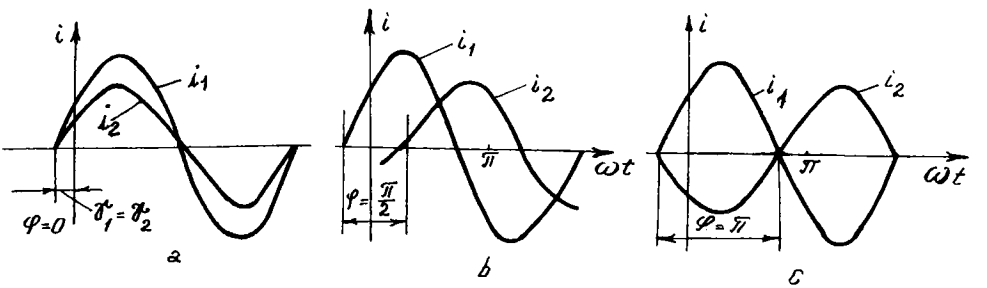


Fig. 5.15. Defazajul dintre două mărimi sinusoidale: a. mărimi în fază; $\varphi = 0$; b. mărimi în cuadratură: $\varphi = \frac{\pi}{2}$; c. mărimi în opoziţie: $\varphi = \pi$.

Aplicaţia 1.

Valoarea instantanee a curentului electric dintr-un circuit are expresia:

$$i = 5\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{\pi}{6}) \quad (A)$$ şi frecvenţa f = 50 Hz.

Să se determine caracteristicile:

a. valoarea efectivă;

b. faza iniţială;

c. valorile instantanee pentru $\omega t = 0$ şi $\omega t = \frac{\pi}{6}$;

d. timpul t_o (sau momentul) la care valoarea instantanee este maximă.

a. Expresia mărimii sinusoidale în forma generală este:

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$$

Prin comparaţie, rezultă valoarea efectivă:

$$I = 5\ A.$$

b. Faza iniţială:

$$\varphi = -\frac{\pi}{6}$$

c. Valorile instantanee:

Pentru $\omega t = 0$; $i = 5\sqrt{2}\sin(-\frac{\pi}{6}) = -5\sqrt{2}\frac{1}{2} = -5\frac{\sqrt{2}}{2}$ A

Pentru $\omega t = \frac{\pi}{6}$; $i = 5\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}) = 0$

d. Din $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$

rezultă că:

$$i = I_m \text{ pentru } \omega t_o + \varphi = \frac{\pi}{2}$$

In acest caz:

$$\omega t_o - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ sau } t_o = \frac{2\pi}{3\omega}$$

sau

$$t_o = \frac{2\pi}{3\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{3}$$

Dar

$$T = \frac{1}{f}$$

Rezultă:

$$t_o = \frac{1}{3\ f} = \frac{1}{3\ .\ 50} = \frac{1}{150}\ s = 6,77\ ms$$

Aplicaţia 2.

Valoarea instantanee a curentului electric dintr-un circuit are expresia:

$$i = 10\sqrt{2}\ \sin\ 100\ \pi\ t\ \ (A)$$

Să se determine caracteristicile:

a. valoarea maximă sau amplitudinea;

b. perioada;

c. faza iniţială.

Expresia curentului sinusoidal în forma generală este:

$$i = I_m\ \sin\ (2\ \pi\ ft + \varphi)\qquad (A)$$

a. Prin comparaţie rezultă valoarea maximă:

$$I_m = 10\sqrt{2}\ \ A$$

b. Perioada este:

$$T = \frac{1}{f}$$

Dar

$$2\ f = 100\quad \text{sau}\quad f = 50\ Hz$$

· rezultă:

$$T = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ s} = 20 \text{ ms}$$

c. Faza iniţială:

$$\psi = 0$$

Aplicaţia 3

Semnalul electric vizualizat pe ecranul unui osciloscop este o tensiune sinusoidală.

Din indicaţiile instrumentului de măsură rezultă că amplitudinea semnalului este 140 mV iar perioada 100 μs (microsecunde) (1 μs = 10^{-6} s).

Se cere:

a. valoarea efectivă a semnalului;

b. frecvenţa;

c. pulsaţia.

Expresia mărimii sinusoidale este:

$$u = U_m \sin (\omega t + \beta)$$

sau

$$u = \sqrt{2}\ U \sin (\omega t + \beta)$$

a. Valoarea efectivă a semnalului este:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{140}{\sqrt{2}} \simeq 100 \quad \text{mV}$$

b. Frecvenţa:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{100 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^6}{100} = 10^4 \text{ Hz} = 10 \text{ KHz}$$

c. Pulsaţia:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 10^4 = 6,28 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$$

Aplicaţia 4

In fig. 5.16 sînt redate sub formă grafică, două tensiuni sinusoidale de valori instantanee u_1 şi u_2.

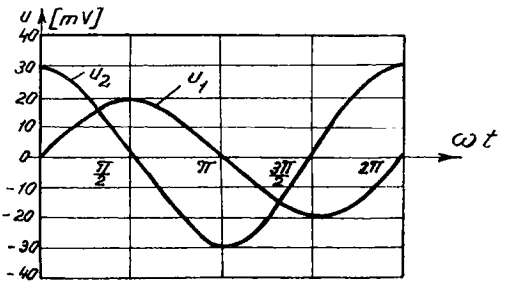


Fig. 5.16.

Să se determine:

a. expresiile mărimilor sinusoidale;

b. valorile efective;

c. defazajul.

a. Expresiile mărimilor sinusoidale:

$$u_1 = 20 \sin \omega t$$

$$u_2 = 30 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

b. Valorile efective:

$$U_1 \sqrt{2} = 20 \longrightarrow U_1 = \frac{20}{\sqrt{2}} \text{ V}$$

$$U_2 \sqrt{2} = 30 \longrightarrow U_2 = \frac{30}{\sqrt{2}} \text{ V}$$

c. Defazajul:

$$\varphi = (\omega t + \psi_1) - (\omega t + \psi_2) = (\omega t + 0^0) - (\omega t + \frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Cele două tensiuni sînt în cuadratură; tensiunea electrică u_2 este defazată înaintea tensiunii u_1 cu $\frac{\pi}{2}$.

Se poate spune şi: tensiunea electrică u_1 este defazată în urma tensiunii u_2 cu $\frac{\pi}{2}$.

5.1.4. Precizări în legătură cu caracteristicile mărimilor sinusoidale.

In tehnică se utilizează în mod curent valoarea efectivă a curenţilor şi a tensiunilor. Dacă nu se fac precizări, valoarea unui curent alternativ sau unei tensiuni alternative reprezintă totdeauna valoarea sa efectivă. Exemplu: curentul nominal al unui receptor este 10 A sau tensiunea reţelei de curent alternativ este 220 V; reprezintă valori efective.

In cazul instrumentelor de măsură în curent alternativ, scala se gradează în valori efective.

Sînt instrumente de măsură al căror echipaj mobil se deplasează proporţional cu valoarea medie a mărimii de măsurat (instrumentele magnetoelectrice). Echipajul mobil la alte instrumente (instrumente electrodinamice) deviază proporţional cu valoarea efectivă a mărimii măsurate.

In ambele cazuri, după cum s-a mai precizat, gradarea scalei se face în valori efective.

5.2. Reprezentarea mărimilor sinusoidale

Circuitele electrice de curent alternativ sînt circuitele în care curenţii şi tensiunile sînt mărimi variabile în timp, de formă sinusoidală.

Astfel, dacă generatoarele de tensiune şi de curent din circuit au tensiuni electromotoare şi curenţi care variază sinusoidal în timp cu aceeaşi frecvenţă, atunci în circuitul respectiv vor circula curenţi şi se vor stabili tensiuni cu variaţie sinusoidală în timp avînd aceeaşi frecvenţă ca sursele.

Pentru rezolvarea cît mai simplă şi rapidă a circuitelor de curent alternativ, s-au imaginat reprezentări ale mărimilor sinusoidale care vor fi tratate în continuare.

5.2.1. Reprezentarea în instantaneu

Mărimile sinusoidale se reprezintă în instantaneu sub forma expresiei:

$$i = I_m \sin (\omega t + \varphi) \quad \text{(exemplu pentru curent)}$$

Utilizarea acestor mărimi, reprezentate în instantaneu, la rezolvarea circuitelor, conduce la calcule extrem de complicate.

Se folosesc totuşi la exprimarea datelor respectiv a rezultatelor dintr-o problemă.

5.2.2. Reprezentarea carteziană

Este o reprezentare grafică într-un sistem de coordonate carteziene în plan, avînd în abscisă valorile timpului t sau valorile unghiului ωt, iar în ordonată valoarea instantanee a mărimii sinusoidale respective (fig. 5.17).

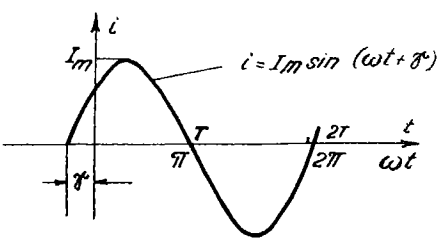


Fig. 5.17. Reprezentarea carteziană a mărimii sinusoidale:
$i = I_m \sin \omega t$

Este folosită mai puţin în calcule, se utilizează însă pentru o prezentare mai sugestivă a mărimilor sinusoidale din probleme respectiv la afişarea acestor mărimi pe ecranul osciloscoapelor. Se pot determina şi calcula caracteristicile mărimilor sinusoidale:

- valoarea maximă, frecvenţă, perioadă, defazaj etc.

5.2.3. Reprezentarea în complex

Se vor preciza noţiunile matematice referitoare la numerele complexe.

- Număr imaginar. Numărul $\sqrt{-1} = j$ este un număr imaginar. S-a notat unitatea imaginară $\sqrt{-1}$ cu j pentru a nu se confunda cu simbolul i al curentului. (Ex.: Numărul $\sqrt{-5}$ se scrie 5j deci $\sqrt{-5} = \sqrt{5}$ j).

- Număr complex. Este suma dintre un număr real şi un număr imaginar.

$$\underline{c} = a + jb \qquad (5.24)$$

în care:

$\underline{c}$ - număr complex;

a - număr real sau partea reală;

jb - număr imaginar sau partea imaginară.

Pentru a deosebi o mărime complexă de o mărime reală, se foloseşte sublinierea (Ex.: $\underline{c}$).

Intr-o ecuaţie, în care există numere complexe, partea reală a membrului drept este egală cu partea reală a membrului stîng şi partea imaginară a membrului drept este egală cu partea imaginară a membrului stîng.

- Reprezentarea grafică a numărului complex. Numărul complex se reprezintă grafic în planul complex. In acest plan, axa absciselor se numeşte axă reală şi se indică prin unitatea reală +1. Axa ordonatelor se numeşte axă imaginară şi se indică prin unitatea imaginară +j.

Un număr complex se reprezintă în planul complex printr-un punct. In fig. 5.18 numărul complex $\underline{c}$ este reprezentat prin punctul C numit afixul numărului complex $\underline{c}$.

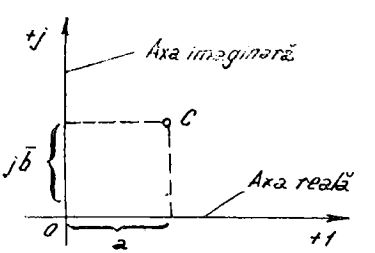


Fig. 5.18. Reprezentarea numărului complex $\underline{c}$.

Abscisa lui C este partea reală a numărului complex $\underline{c}$ iar ordonata este partea imaginară a numărului complex $\underline{c}$.

Un număr complex se reprezintă în planul complex şi printr-un segment de dreaptă orientat de la origine spre afixul numărului complex. Se numeşte în acest caz fazor. Pentru numărul complex $\underline{c}$, s-a reprezentat grafic în fig. 5.19 fazorul $\overrightarrow{OC}$.

Se obişnuieşte ca numărul complex $\underline{c}$, afixul C şi fazorul $\overrightarrow{OC}$ să se noteze cu $\underline{c}$.

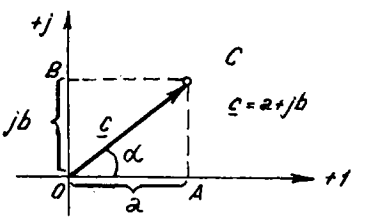


Fig. 5.19. Fazorul $\overrightarrow{OC}$.

Numărul real şi pozitiv:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (5.25)$$

se numeşte modulul numărului complex $\underline{c}$ şi se notează cu $|\underline{c}|$.

Argumentul numărului complex este unghiul

$$\alpha = \text{arc tg } \frac{b}{a} \qquad (5.26)$$

Se notează cu $\arg \{\underline{c}\}$

Reprezentarea analitică a numărului complex. Numărul complex se reprezintă analitic în două forme: forma trigonometrică şi forma exponenţială.

Forma trigonometrică. Din triunghiul dreptunghic AQC (fig. 5.19) se scrie:

$$a = r \cos\alpha \quad \text{şi} \quad b = r \sin\alpha$$

Inlocuind, numărul complex $\underline{c}$ se scrie sub forma trigonometrică:

$$\underline{c} = r\,(\cos\alpha + j \sin\alpha) \tag{5.27}$$

Forma exponenţială. Se demonstrează următoarea relaţie:

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j \sin\alpha \tag{5.28}$$

Tot prin înlocuire se obţine forma exponenţială a numărului complex $\underline{c}$:

$$\underline{c} = re^{j\alpha} \tag{5.29}$$

Adunarea şi scăderea numerelor complexe. Numerele complexe se adună sau se scad, adunînd respectiv scăzînd părţile reale separat şi părţile imaginare separat.

Adunare:

$$\underline{c}_1 + \underline{c}_2 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) \tag{5.30}$$

Scădere:

$$\underline{c}_1 - \underline{c}_2 = (a_1 + jb_1) - (a_2 + jb_2) = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2) \tag{5.31}$$

Inmulţirea numerelor complexe. Forma exponenţială a numerelor complexe înlesneşte efectuarea operaţiei; se înmulţesc modulele şi se adună argumentele:

$$\underline{c}_1\underline{c}_2 = (r_1 e^{j\alpha_1})\,(r_2 e^{j\alpha_2}) = r_1 r_2 e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)} \tag{5.32}$$

Impărţirea numerelor complexe. In cazul împărţirii, se împart modulele şi se scad argumentele:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{r_1 e^{j\alpha_1}}{r_2 e^{j\alpha_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)} \qquad (5.33)$$

Conjugatul numărului complex. Dacă numărul complex este:

$$\underline{c} = a + jb = re^{+j\alpha}$$

atunci conjugatul lui $\underline{c}$ este:

$$\underline{c}^* = a - jb = re^{-j\alpha} \qquad (5.34)$$

Se observă că:

$$\underline{c}\,\underline{c}^* = re^{+j\alpha} re^{-j\alpha} = r^2 = a^2 + b^2 \qquad (5.35)$$

Aplicaţia 1

Se dă numărul complex:

$$\underline{c} = 10\, e^{j\frac{\pi}{6}}$$

Să se reprezinte sub formă trigonometrică şi să se reprezinte grafic:

$$10\, e^{j\frac{\pi}{6}} = 10 \cos\frac{\pi}{6} + j\, 10 \sin\frac{\pi}{6}$$

Dar: $\cos\frac{\pi}{6} = \cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,86$

şi $\sin\frac{\pi}{6} = \sin 30^o = \frac{1}{2} = 0,5$.

Deci forma trigonometrică este:

$$10\, e^{j\frac{\pi}{6}} = 10 \cos 30^{o} + j\, 10 \sin 30^{o} = 8,6 + j\, 5$$

Numărul complex este reprezentat grafic în fig. 5.20.

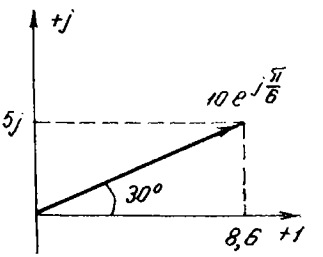


Fig. 5.20.

Aplicaţia 2

Să se reprezinte în formă exponenţială numărul complex şi să se reprezinte grafic:

$$\underline{c} = 2 + j2$$

Modulul:

$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2,84$$

Argumentul:

$$\alpha = \text{arc tg}\, \frac{2}{2} = 45^{o} = 0,79 \text{ radiani}$$

Forma exponenţială va fi:

$$2 + j2 = 2,84\ e^{j\, 45^{o}} = 2,84\ e^{j\, 0,79}$$

Sub formă grafică, numărul complex este reprezentat în fig. 5.21.

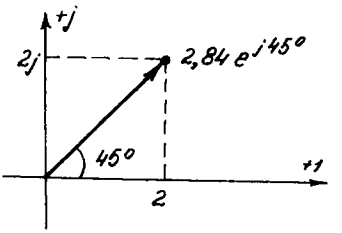


Fig. 5.21.

Aplicaţia 3

Să se calculeze: $e^{j\frac{\pi}{2}}$, $e^{-j\frac{\pi}{2}}$ şi $e^{\pm j\pi}$. Să se reprezinte grafic.

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = j$$

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} - j\sin\frac{\pi}{2} = -j$$

$$e^{+j\pi} = \cos\pi + j\sin\pi = -1$$

$$e^{-j\pi} = \cos\pi - j\sin\pi = -1$$

Reprezentările grafice în planul complex sînt indicate în fig. 5.22.

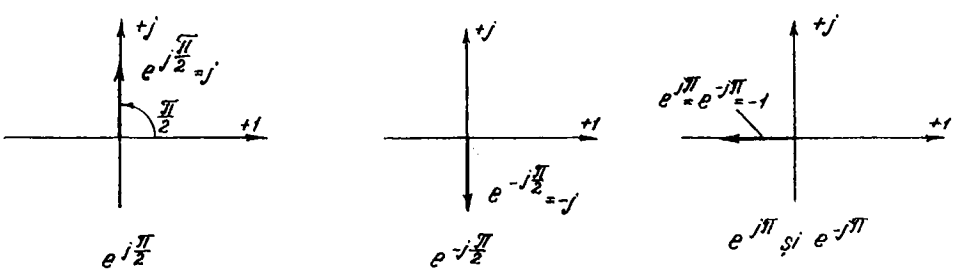


Fig. 5.22.

Aplicaţia 4

Să se înmulţească numărul complex $\underline{c} = 5\,j$, cu termenii: $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$; $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ şi $-1 = e^{j\pi}$.

$\underline{c}$ sub formă exponenţială este:

$$\underline{c} = 5\,e^{j\frac{\pi}{2}}$$

a. Inmulţirea cu $e^{j\frac{\pi}{2}}$:

$$\underline{c}e^{j\frac{\pi}{2}} = 5\,e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = 5\,e^{j\pi}$$

b. Inmulţirea cu $e^{-j\frac{\pi}{2}}$:

$$\underline{c}e^{-j\frac{\pi}{2}} = 5\,e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = 5$$

c. Inmulţirea cu $e^{j\pi}$:

$$\underline{c}e^{j\pi} = 5\,e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\pi} = 5\,e^{j\frac{3\pi}{2}} = 5\,e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Reprezentările grafice în planul complex sînt indicate în fig. 5.23.

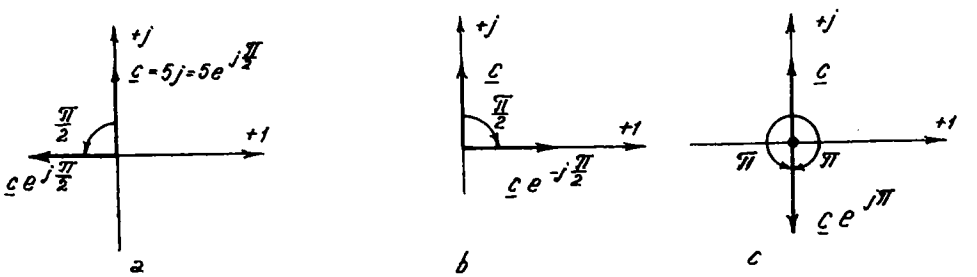


Fig. 5.23.

Se constată că înmulţirea fazorului $\underline{c}$ cu $e^{j\frac{\pi}{2}}$ înseamnează rotirea acestuia cu unghiul $\frac{\pi}{2}$ în sens antiorar (înainte).

Dacă se înmulţeşte fazorul $\underline{c}$ cu $e^{-j\frac{\pi}{2}}$, rotirea are loc în sens orar cu unghiul $\frac{\pi}{2}$ (înapoi).

Cînd se înmulţeşte $\underline{c}$ cu $e^{j\pi}$, rotirea se face cu unghiul π pe oricare din cele două sensuri: orar sau antiorar.

Mărimi sinusoidale reprezentate în complex. O mărime sinusoidală este complet determinată cînd se cunoaşte: frecvenţa, valoarea efectivă şi faza iniţială.

Frecvenţa este o mărime cunoscută; mai trebuie precizate celelalte două pentru a cunoaşte complet mărimea sinusoidală.

Dacă valoarea instantanee a curentului electric i este descrisă de o sinusoidă în timp prin expresia:

$$i = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t + \psi),$$

se spune că i este precizat cînd se cunoaşte valoarea efectivă I şi faza iniţială ψ.

Dar şi un număr complex $\underline{c}$ sub forma exponenţială:

$$\underline{c} = r\, e^{j\alpha}$$

este precizat cînd se cunoaşte modulul r şi argumentul α.

Dacă o mărime sinusoidală este complet determinată cînd se cunoaşte perechea de numere reale: valoarea efectivă şi faza iniţială, respectiv un număr complex este complet determinat cînd se cunoaşte tot o pereche de numere reale: modulul şi argumentul, atunci se poate stabili o corespondenţă între aceste mărimi.

Corespondenţa trebuie înţeleasă ca o posibilitate de înlocuire a mărimii sinusoidale cu o mărime complexă respectiv a mărimii complexe cu o mărime sinusoidală.

Inlocuirea se numeşte reprezentarea în complex a mărimilor sinusoidale. Această reprezentare se face sub două forme:

- fazorială (grafică);
- analitică (trigonometrică sau exponenţială).

Cum se procedează:

In reprezentarea în complex a mărimii sinusoidale (Ex. curentul electric):

$$i = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t + \gamma)$$

se asociază numărul complex $\underline{I}$ al cărui modul este egal cu valoarea efectivă şi al cărui argument este egal cu faza iniţială.

Corespondenţa se scrie astfel:

$$\begin{array}{l} i = \sqrt{2}\, I \sin(\omega t + \gamma) \\ \updownarrow \qquad \nearrow \\ \underline{I} = I\, e^{j\gamma} \end{array} \qquad (5.36)$$

Reprezentat în planul complex, $\underline{I}$ se numeşte fazor.

Trecerea de la o mărime sinusoidală la mărimea complexă asociată, respectiv de la mărimea complexă la mărimea sinusoidală se face conform relaţiei (5.36).

Pentru a fi reprezentate în complex, mărimile sinusoidale dintr-un circuit electric trebuie să fie de aceeaşi frecvenţă.

Ce avantaj are reprezentarea în complex a mărimilor sinusoidale? Avantajul constă în aceea că operaţiile matematice complicate de rezolvare a circuitelor electrice se înlocuiesc cu operaţii algebrice sau grafice mult mai simple.

Aplicaţia 1

Să se reprezinte în complex curentul electric:

$$i = 2\sqrt{2} \sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \quad (A)$$

Reprezentarea în complex:

$$\underline{I} = 2\, e^{-j\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - j \sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\,\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - j$$

In fig. 5.24 este reprezentat fazorul $\underline{I}$.

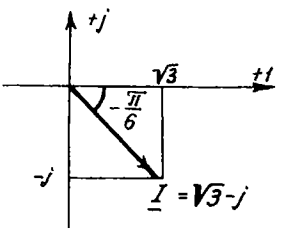


Fig. 5.24.

Aplicaţia 2

Să se scrie expresia instantanee a curentului electric pentru care reprezentarea în complex este:

$$\underline{I} = 10\ (1 + \sqrt{3})\ j$$

Sau:

$$\underline{I} = 20\ (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ j) = 20\ (\cos\frac{\pi}{3} + j\ \sin\frac{\pi}{3})$$

Sub formă exponenţială:

$$\underline{I} = 20\ e^{j\frac{\pi}{3}}$$

Expresia curentului în instantaneu:

$$i = 20\sqrt{2}\ \sin\ (\omega t + \frac{\pi}{3})$$

5.3. Elemente ideale de circuit în regim sinusoidal

Circuitele electrice de curent alternativ sînt circuitele în care curenţii şi tensiunile variază sinusoidal în timp.

Elementele de circuit care intră în compunerea unui circuit electric de curent alternativ sînt: elemente de circuit pasive şi elemente de circuit active. Acestea sînt elemente dipolare.

Elementele dipolare pasive sînt: rezistorul, bobina şi condensatorul iar elementele de circuit active sînt: sursa de tensiune şi sursa de curent.

Se vor prezenta, în continuare, elementele ideale de circuit.

5.3.1. Elemente de circuit pasive

Un element dipolar pasiv, avînd o tensiune u la borne, absoarbe curentul i. Puterea primită pe la borne este:

$$p = u\, i \qquad (5.37)$$

S-a notat cu litere mici, tensiunea, curentul şi puterea. Acestea sînt valorile instantanee ale mărimilor electrice respective.

Rezistorul ideal este elementul de circuit dipolar pasiv la bornele căruia, tensiunea este proporţională cu intensitatea curentului care străbate acest element. Energia primită pe la borne se transformă în căldură prin efect electrocaloric.

Ecuaţia caracteristică a rezistorului este:

$$u_R = R\, i \qquad (5.38)$$

Factorul de proporţionalitate (R) este rezistenţa electrică a rezistorului (fig. 5.25).

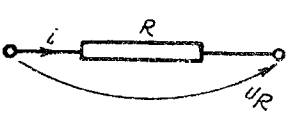


Fig. 5.25. Tensiunea la bornele rezistorului R este proporţională cu curentul i: $u_R = R\, i$

Tensiunea la borne u_R urmăreşte instantaneu variaţia în timp a curentului.

Mărimea u_R se mai numeşte <u>cădere de tensiune rezistivă</u>.

Dacă prin rezistorul R, circulă curentul sinusoidal:

$$i = I\sqrt{2}\ \sin\ (\omega t + \varphi)$$

tensiunea la borne rezultă:

$$u_R = Ri = RI\sqrt{2}\ \sin\ (\omega t + \varphi) \qquad (5.39)$$

Valoarea efectivă a tensiunii este:

$$U_R = RI$$

iar faza iniţială este φ, adică tensiunea la bornele rezistorului este înfază cu curentul i.

<u>Reprezentarea în instantaneu</u> a mărimilor electrice va fi:

- Curentul electric:

$$i = I\sqrt{2}\ \sin\ (\omega t + \varphi)$$

- Tensiunea electrică:

$$u_R = U_R\sqrt{2}\ \sin\ (\omega t + \varphi) \qquad (5.40)$$

în care:

$$U_R = RI$$

<u>Reprezentarea carteziană</u>. In fig. 5.26 sînt reprezentate: curentul electric i şi tensiunea electrică la bornele rezistorului u_R.

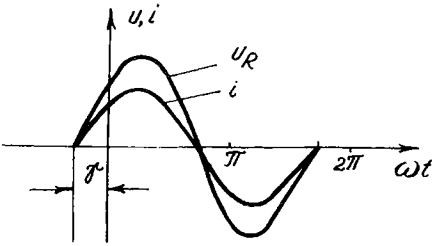


Fig. 5.26. Reprezentarea cartezianã a curentului i şi a tensiunii u_R la bornele rezistorului R.

Reprezentarea în complex. In complex, curentul electric va fi:

$$\underline{I} = I\, e^{j\vartheta} \tag{5.41}$$

şi tensiunea electrică:

$$\underline{U}_R = U_R\, e^{j\vartheta} \tag{5.42}$$

Relaţia dintre $\underline{U}_R$ şi $\underline{I}$ va fi:

$$\underline{U}_R = R\,\underline{I} \tag{5.43}$$

In fig. 5.27 a, s-a reprezentat rezistorul R şi s-au indicat mărimile electrice complexe $\underline{U}_R$ şi $\underline{I}$ iar în fig. 5.27 b este reprezentată diagrama fazorială.

Fig. 5.27. a. reprezentarea simbolică în complex a rezistorului R; b. diagrama fazorială.

Bobina ideală. Este elementul dipolar pasiv de circuit pentru care tensiunea sinusoidală de la borne este defazată cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea curentului sinusoidal care străbate elementul respectiv. Energia primită pe la borne o acumulează sub formă de energie magnetică.

Dacă curentul electric sinusoidal este:

$$i = I\sqrt{2} \sin \omega t$$

tensiunea la bornele bobinei va fi:

$$u_L = U_L\sqrt{2} \sin (\omega t + \frac{\pi}{2}) \qquad (5.44)$$

în care valoarea efectivă a tensiunii este

$$U_L = \omega L I \qquad (5.45)$$

în care:

L este inductivitatea bobinei,

Mărimea

$$X_L = \omega L \qquad (5.46)$$

se numeşte reactanţă inductivă.

Unitatea de măsură în SI este ca pentru rezistenţa electrică ohmul (Ω).

Simbolul bobinei ideale şi mărimile electrice: tensiunea la borne şi curentul prin bobină - valori instantanee - s-au reprezentat în fig. 5.28.

Fig. 5.28. Simbolul bobinei L.

Referitor la comportarea bobinei ideale într-un circuit electric, se fac următoarele precizări:

a. Curentul sinusoidal este defazat în urma tensiunii cu un unghi egal cu $\frac{\pi}{2}$ radiani.

b. Valoarea efectivă a curentului electric sinusoidal este egală cu valoarea efectivă a tensiunii sinusoidale împărţită la reactanţa inductivă a bobinei.

$$I = \frac{U_L}{\omega L} \quad \text{sau} \quad I = \frac{U_L}{X_L} \tag{5.47}$$

c. In curent continuu, reactanţa inductivă a bobinei este nulă ($X_{L_{cc}} = \omega L = 2\pi fL = 0$ deoarece în curent continuu $f = 0$). Prin urmare, bobina ideală în curent continuu este un scurtcircuit. Bobina reală este caracterizată prin inductivitatea L şi prin rezistenţa electrică R_L. In acest caz, bobina reală se comportă în curent continuu ca un rezistor cu rezistenţă electrică R_L.

d. In curent alternativ cu frecvenţă ridicată, bobina ideală întrerupe circuitul.

e. Reactanţa inductivă are sens în curent alternativ; valoarea acesteia este determinată de frecvenţa circuitului electric; inductivitatea nu depinde de regimul de frecvenţă.

Reprezentarea mărimilor electrice pentru bobina ideală.

Reprezentarea în instantaneu a mărimilor electrice va fi:

- Curentul electric:

$$i = I\sqrt{2} \sin \omega t$$

- Tensiunea electrică

$$u_L = U_L\sqrt{2} \sin (\omega t + \frac{\pi}{2}) \tag{5.48}$$

în care:

Reprezentarea carteziană. Pentru curentul electric sinusoidal care străbate bobina ideală şi tensiunea electrică la bornele bobinei, graficul în coordonate carteziene este prezentat în fig. 5.29.

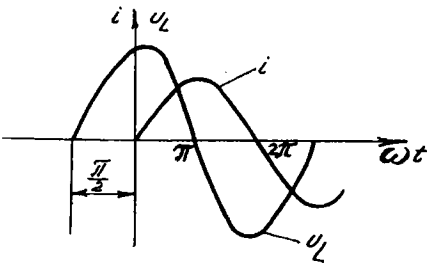


Fig. 5.29. Reprezentarea carteziană a curentului i şi a tensiunii u_L la bornele bobinei L.

Reprezentarea în complex. In complex, curentul electric sinusoidal va fi:

$$\underline{I} = I\, e^{j0^\circ} \quad \text{sau} \quad \underline{I} = I \tag{5.49}$$

şi tensiunea electrică sinusoidală la bornele bobinei va fi:

$$\underline{U}_L = U_L\, e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Dar:

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j$$

Deci:

$$\underline{U}_L = j\, U_L = j\, X_L I = j\, X_L \underline{I} \ .$$

Rezultă:

$$\underline{U}_L = j\, \omega L\, \underline{I} \ . \tag{5.50}$$

In fig. 5.30 a s-a reprezentat bobina ideală L şi s-au indicat mărimile electrice complexe $\underline{U}_L$ şi $\underline{I}$.

In fig. 5.30 b s-a redat diagrama fazorială pentru mărimile electrice complexe $\underline{U}_L$ şi $\underline{I}$.

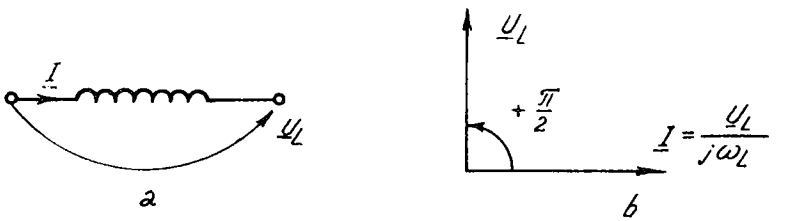


Fig. 5.30. a. reprezentarea simbolică în complex a bobinei L; b.diagrama fazorială.

Condensatorul ideal. Este elementul dipolar pasiv de circuit pentru care tensiunea sinusoidală de la borne este defazată cu $\frac{\pi}{2}$ în urma curentului sinusoidal absorbit de elementul respectiv. Energia primită pe la borne o acumulează sub formă de energie electrică.

Dacă curentul electric sinusoidal este

$$i = I\sqrt{2}\sin\omega t,$$

tensiunea electrică la bornele condensatorului ideal va fi

$$u_c = U_c\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (5.51)$$

în care valoarea efectivă a tensiunii este

$$U_c = \frac{I}{\omega C} \qquad (5.52)$$

în care C este capacitatea condensatorului ideal.

Mărimea

$$X_c = \frac{1}{\omega C} \qquad (5.53)$$

se numeşte reactanţă capacitivă.

Unitatea de măsură în S I este ohmul (Ω).

Simbolul condensatorului ideal şi mărimile electrice: tensiunea la borne şi curentul prin condensator - valori instantanee - s-au reprezentat în fig. 5.31.

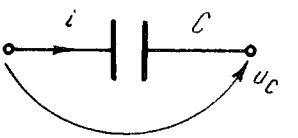


Fig. 5.31. Simbolul condensatorului C.

Referitor la comportarea condensatorului ideal într-un circuit electric, se fac următoarele precizări:

a. Curentul sinusoidal este defazat înaintea tensiunii cu un unghi egal cu $\frac{\pi}{2}$ radiani.

b. Valoarea efectivă a curentului electric sinusoidal este egală cu valoarea efectivă a tensiunii sinusoidale împărţită la reactanţa capacitivă a condensatorului:

$$I = \frac{U_c}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{U_c}{X_c} \qquad (5.54)$$

c. In curent continuu, reactanţa capacitivă a condensatorului este infinită ($X_{C_{cc}} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC} = \infty$ deoarece în curent continuu f = 0). Prin urmare, condensatorul ideal în curent continuu întrerupe circuitul electric.

d. In curent alternativ cu frecvenţă ridicată, condensatorul ideal scurtcircuitează circuitul electric; la frecvenţe joase, reprezintă o întrerupere.

e. Reactanţa capacitivă are sens în curent alternativ; valoarea acesteia este determinată de frecvenţa circuitului; capacitatea nu depinde de regimul de frecvenţă.

Reprezentarea mărimilor electrice pentru condensatorul ideal.

Reprezentarea în instantaneu a mărimilor electrice va fi:

- Curentul electric

$$i = I\sqrt{2} \sin \omega t .$$

- Tensiunea electrică

$$u_c = U_c \sqrt{2} \sin (\omega t - \frac{\pi}{2}) \qquad (5.55)$$

în care

$$U_c = X_c I = \frac{1}{\omega C} I = \frac{1}{2\pi fC} I .$$

Reprezentarea carteziană. Pentru curentul electric sinusoidal absorbit de condensatorul ideal şi tensiunea electrică sinusoidală la bornele condensatorului, este prezentat în fig. 5.32 graficul în coordonate carteziene.

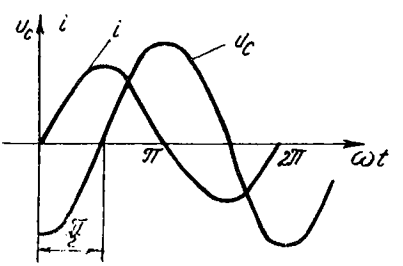


Fig. 5.32. Reprezentarea carteziană a curentului i şi a tensiunii u_c la bornele condensatorului C.

Reprezentarea în complex. Curentul electric sinusoidal absorbit de condensatorul ideal se va reprezenta în complex astfel:

$$\underline{I} = I\, e^{j0^{o}} \quad \text{sau} \quad \underline{I} = I\,; \tag{5.56}$$

tensiunea electrică sinusoidală la bornele condensatorului va fi în complex:

$$\underline{U}_c = U_c\, e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

dar

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j = \frac{1}{j}\,.$$

Rezultă

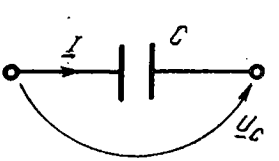
$$\underline{U}_c = -j\,U_c = \frac{U_c}{j} = \frac{X_c\, I}{j} = \frac{X_c\, \underline{I}}{j}\,.$$

Deci

$$\underline{U}_c = -j\,X_c\,\underline{I} = \frac{X_c\,\underline{I}}{j} = -\frac{j}{\omega C}\,\underline{I} = \frac{1}{j\,\omega C}\,\underline{I}\,. \tag{5.57}$$

In fig. 5.33 a,s-a reprezentat condensatorul ideal C şi s-au indicat mărimile electrice complexe $\underline{U}_c$ şi $\underline{I}$.

In fig. 5.33 b, este redată diagrama fazorială pentru mărimile electrice complexe $\underline{U}_c$ şi $\underline{I}$.



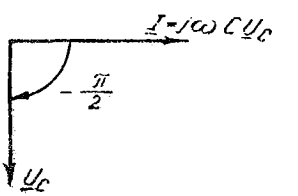


Fig. 5.33. a) reprezentarea simbolică în complex a condensatorului C; b. diagrama fazorială.

Aplicaţia 1

La bornele unui rezistor electric cu rezistenţa R = 1 kΩ , se aplică o tensiune electrică alternativă:

$$u = 12\sqrt{2}\ \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Se cere:

a. reprezentarea în instantaneu a curentului electric;

b. valoarea efectivă a curentului electric;

c. reprezentarea carteziană a curentului electric şi a tensiunii electrice;

d. reprezentarea în complex şi diagrama fazorială a celor două mărimi electrice.

a. Din ecuaţia caracteristică a rezistorului u = R i se obţine:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{12}{1 \cdot 10^{3}}\sqrt{2}\ \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\ (A)$$

$$= 12\sqrt{2}\ \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\ (mA)$$

b. Valoarea efectivă a curentului electric:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{12}{1 \cdot 10^{3}} = 12 \cdot 10^{-3}\ A = 12\ mA$$

c. Reprezentarea carteziană a celor două mărimi este redată în fig. 5.34.

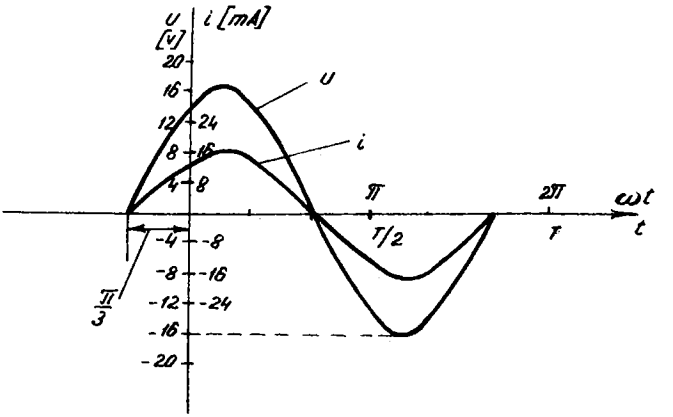


Fig. 5.34.

d. Reprezentarea în complex a mărimilor electrice este:

- curentul electric

$$\underline{I} = I\, e^{j\varphi} = 12 \cdot 10^{-3}\, e^{j\frac{\pi}{3}}\ (A) = 12 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}\ (mA)$$

sau

$$\underline{I} = 12\ (\cos\frac{\pi}{3} + j \sin\frac{\pi}{3}) = 12\ (\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}) = 6\ (1 + j\sqrt{3})\ (mA);$$

- tensiunea electrică

$$\underline{U} = U\, e^{j\alpha} = U\, e^{j\varphi} \quad \text{deoarece } \alpha = \varphi$$

sau

$$\underline{U} = 12\, e^{j\frac{\pi}{3}} = 12\ (\cos\frac{\pi}{3} + j \sin\frac{\pi}{3}) = 12\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

deci,

$$\underline{U} = 6\ (1 + j\sqrt{3})\quad V\,.$$

Diagrama fazorială este prezentată în fig. 5.35. cu următoarea

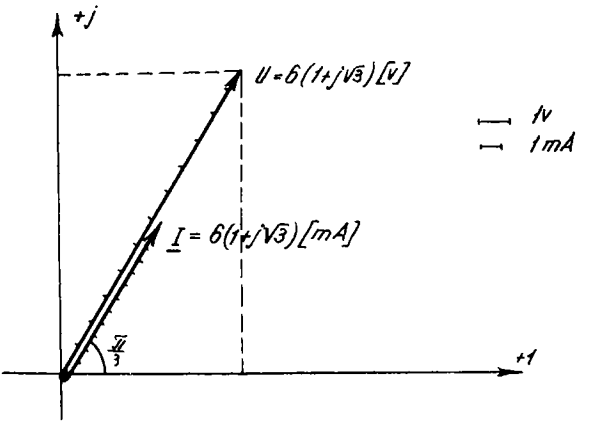


Fig. 5.35.

precizare:

Numerele complexe neavînd unitate de măsură se convine ca reprezentarea în complex să fie astfel încît modulul să reprezinte valoarea efectivă a mărimii exprimată în unităţi S I corespunzătoare.

Aplicaţia 2

La bornele unei bobine electrice cu inductivitate L = 19 mH se aplică o tensiune electrică alternativă:

$$u = 12\sqrt{2}\ \sin\ (100\,\pi\,t + \frac{\pi}{3}) .$$

Se cere:

a. Valoarea reactanţei inductive;

b. Valoarea efectivă a curentului electric;

c. Reprezentarea în instantaneu a curentului electric;

d. Reprezentarea carteziană a curentului electric şi a tensiunii electrice;

e. Reprezentarea în complex şi diagrama fazorială a celor două mărimi electrice.

a. Valoarea reactanţei inductive se determină din:

$$X_L = \omega L = 2\pi fL = 2\pi \cdot 50 \cdot 19 \cdot 10^{-3} = 6\,\Omega,$$

b. Valoarea efectivă a curentului electric se calculează cu relaţia:

$$I = \frac{U_L}{X_L} = \frac{12}{6} = 2\ A$$

c. Reprezentarea în instantaneu a curentului electric.

Curentul electric este defazat cu $\frac{\pi}{2}$ în urma tensiunii electrice sinusoidale (sau: tensiunea electrică este defazată cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea curentului electric). Rezultă:

$$i = I\sqrt{2}\ \sin\left[(100\pi t + \frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{2}\right] \text{ sau}$$

$$i = 2\sqrt{2}\ \sin\,(100\pi t - \frac{\pi}{6})\ (A).$$

d. Reprezentările carteziene a celor două mărimi electrice: tensiunea şi curentul sînt redate în fig. 5.36.

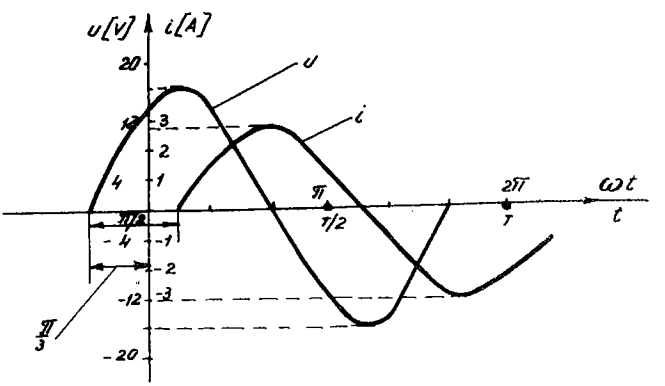


Fig. 5.36.

e. Reprezentarea în complex şi diagrama fazorială a celor două mărimi electrice: tensiunea şi curentul.

- Curentul electric:

$$\underline{I} = I\, e^{j\psi} = 2\, e^{-j\frac{\pi}{6}} = 2\,(\cos\frac{\pi}{6} - j\,\sin\frac{\pi}{6}) =$$

$$= 2\,(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\,\frac{1}{2}) = (\sqrt{3} - j) \quad (A)$$

- Tensiunea electrică:

$$\underline{U} = U\, e^{j\beta} = 12\, e^{j\frac{\pi}{3}} = 12\,(\cos\frac{\pi}{3} + j\,\sin\frac{\pi}{3}) =$$

$$= 12\,(\frac{1}{2} + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}) = 6\,(1 + j\,\sqrt{3}) \quad (V)$$

Diagrama fazorială este reprezentată în fig. 5.37.

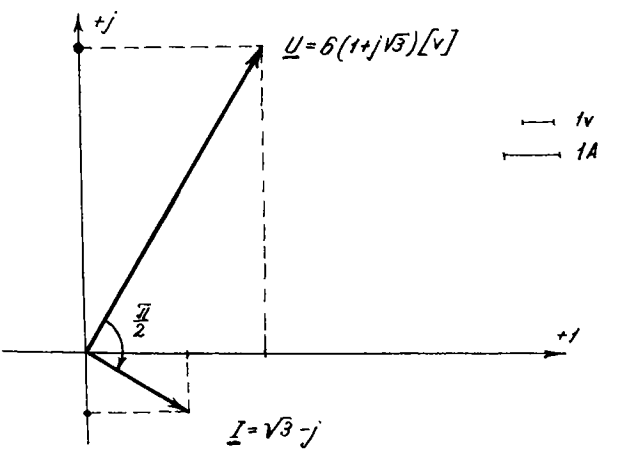


Fig. 5.37.

Aplicaţia 3

La bornele unui condensator electric cu capacitatea C = 0,64 mF se aplică o tensiune electrică alternativă:

$$u = 12\,\sqrt{2}\,\sin\,(100\pi t + \frac{\pi}{3}) \quad (V)$$

Se cere:

a. Valoarea reactanţei capacitive ;

b. Valoarea efectivă a curentului electric ;

c. Reprezentarea în instantaneu a curentului electric ;

d. Reprezentarea carteziană a curentului electric şi a tensiunii electrice ;

e. Reprezentarea în complex şi diagrama fazorială a celor două mărimi electrice.

a. Valoarea reactanţei capacitive se determină din:

$$X_c = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2.50.3,14.0,64.10^{-3}} = \frac{10^3}{200} = 5\ \Omega$$

b. Valoarea efectivă a curentului electric:

$$I = \frac{U_c}{X_c} = \frac{12}{5} = 2,4 \quad A$$

c. Reprezentarea în instantaneu a curentului electric.

Curentul electric este defazat cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea tensiunii electrice sinusoidale (tensiunea electrică este defazată cu $\frac{\pi}{2}$ în urma curentului electric).

Rezultă:

$$i = I\sqrt{2}\ \sin\left[(100\pi t + \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{2}\right] = 2,4\sqrt{2}\ \sin\ (100\pi t + \frac{5\pi}{6})\ \ (A)$$

d. Reprezentările carteziene a celor două mărimi electrice, tensiunea şi curentul, sînt redate în fig. 5.38.

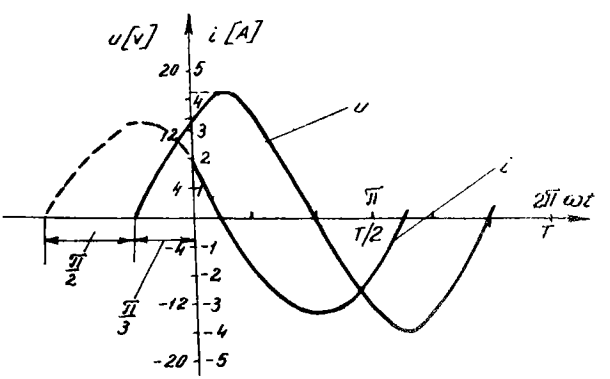


Fig. 5.38.

e. Reprezentarea în complex şi diagrama fazorială a celor două mărimi electrice.

- Curentul electric:

$$\underline{I} = I\, e^{j\varphi} = 2,4\, e^{j\frac{5\pi}{6}} = 2,4\,(\cos\frac{5\pi}{6} + j\,\sin\frac{5\pi}{6}) = 2,4\,(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}) =$$

$$= 1,2\,(-\sqrt{3} + j) \quad (A)$$

- Tensiunea electrică:

$$\underline{U} = 6\,(1 + j\,\sqrt{3}) \quad (V)$$

Diagrama fazorială este reprezentată în fig. 5.39.

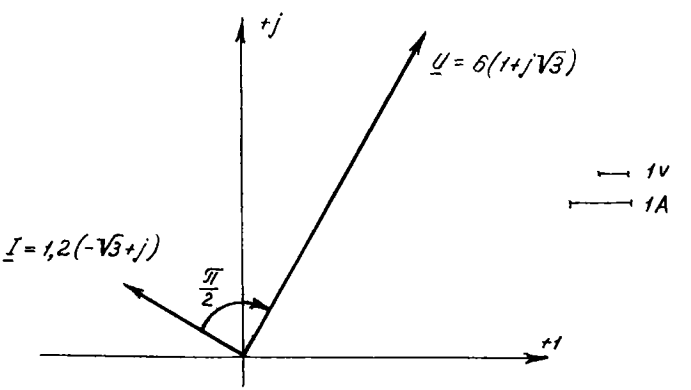


Fig. 5.39.

5.3.2. Elemente de circuit active

Sursa ideală de tensiune. Este elementul de circuit dipolar activ care este caracterizat printr-o tensiune la borne independentă de circuitul în care este conectat. Curentul debitat de sursă este determinat de circuit.

Tensiunea la bornele sursei ideale este u = e în care e reprezintă tensiunea electromotoare a sursei (fig. 5.40).

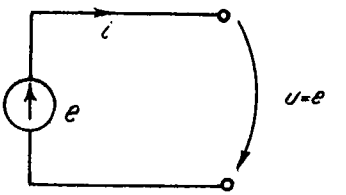


Fig. 5.40. Simbolul sursei ideale de tensiune.

Puterea instantanee furnizată de sursă pe la borne spre exterior este:

$$p = ui = e\,i \qquad (5.58)$$

Sursa ideală de curent. Este elementul de circuit dipolar activ care este caracterizat printr-un curent debitat, independent de circuitul în care este conectat.

Tensiunea la bornele sursei de curent este determinată de circuitul electric.

Curentul electric debitat pe la bornele sursei ideale de curent este $i = i_g$ în care i_g reprezintă curentul electric al sursei (fig. 5.41).

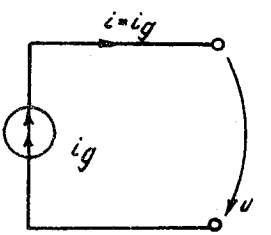


Fig. 5.41. Simbolul sursei ideale de curent.

Puterea instantanee furnizată de sursă pe la borne este:

$$p = ui = u\, i_g \qquad (5.59)$$

In tehnică, apar surse sau generatoare reale. In scheme electrice, acestea se pot reprezenta numai prin elemente ideale în care pot apare de exemplu: o sursă ideală de tensiune legată în serie cu un rezistor ideal şi o bobină ideală.

5.4. Circuite simple în regim sinusoidal

5.4.1. Impedanţa. Admitanţa

Elementele ideale de circuit se pot lega în diferite moduri. Un dipol, care este o porţiune de circuit între două borne de acces, poate fi de exemplu un rezistor ideal, o bobină ideală, un condensator ideal, o conexiune serie sau paralel a acestora.

Dacă la bornele de acces ale dipolului se aplică o tensiune alternativă sinusoidală

$$u = U\sqrt{2}\ \sin\ (\omega t + \beta)$$

prin circuit va apare un curent sinusoidal:

$$i = I\sqrt{2}\ \sin\ (\omega t + \varphi)$$

Raportul pozitiv dintre valoarea efectivă a tensiunii de la bornele dipolului şi valoarea efectivă a curentului electric care pătrunde prin bornele dipolului, se numeşte impedanţa dipolului sau a circuitului:

$$Z = \frac{U}{I} \qquad (5.60)$$

Unitatea de măsură pentru impedanţă este ohmul (Ω).

Admitanţa circuitului este valoare inversă a impedanţei:

$$Y = \frac{1}{Z} \qquad (5.61)$$

Unitatea de măsură pentru admitanţă este siemens-ul (S).

Defazajul în cazul dipolului reprezintă diferenţa dintre fazele iniţiale ale tensiunii şi curentului adică:

$$\varphi = (\omega t + \beta) - (\omega t + \gamma) = \beta - \gamma \qquad (5.62)$$

Defazajul poate fi pozitiv, negativ sau nul.

Unitatea de măsură este radianul (rad).

Defazajul este cuprins între limitele:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq +\frac{\pi}{2} \qquad (5.63)$$

Distingem următoarele cazuri:

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$ dipolul este compus dintr-un condensator ideal;

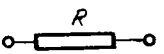
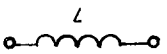
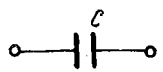
$\varphi = +\frac{\pi}{2}$ dipolul este compus dintr-o bobină ideală;

$\varphi = 0$ dipolul este compus dintr-un rezistor ideal;

$-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ dipolul este compus din rezistor ideal, bobină ideală, condensator ideal, legate în serie sau paralel.

Impedanţa Z şi defazajul φ caracterizează complet un circuit dipolar pasiv.

In cazul elementelor de circuit dipolare ideale şi pasive: rezistor, bobină şi condensator, rezultă, în baza definiţiilor stabilite, următoarele valori pentru impedanţa Z, admitanţa Y şi defazajul φ:

Elementul de circuit dipolar	Impedanţa Z =	Admitanţa Y =	Defazajul φ =
	R	$\frac{1}{R}$	0
	ωL	$\frac{1}{\omega L}$	$+\frac{\pi}{2}$
	$\frac{1}{\omega C}$	ωC	$-\frac{\pi}{2}$

Aplicaţia 1

Intr-un circuit electric, curentul electric are expresia instantanee:

$$i = 2\sqrt{2} \sin \omega t \quad (A)$$

Impedanţa circuitului este $Z = 100\ \Omega$ iar defazajul este $\varphi = -\frac{\pi}{3}$. Să se determine tensiunea aplicată la bornele circuitului.

Valoarea efectivă a tensiunii este:

$$U = Z\ I = 100\ .\ 2 = 200\ V$$

Faza iniţială a tensiunii este:

$$\beta = \varphi + \psi = -\frac{\pi}{3} + 0 = -\frac{\pi}{3}$$

Prin urmare, tensiunea electrică sinusoidală va fi:

$$u = 200\sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

Curentul este defazat înaintea tensiunii cu $\frac{\pi}{3}$ radiani.

5.5. Circuite serie şi paralel

In aplicaţiile tehnice nu se întîlnesc elemente dipolare de circuit ideale. Elementele pasive: rezistor, bobină, condensator sînt echivalate cu elemente pasive ideale conectate în serie sau paralel. De exemplu, bobina reală se echivalează cu două elemente ideale legate în serie: un rezistor ideal de rezistenţă R şi o bobină ideală de inductivitate L. Asemănător, se obţin circuite simple RC sau RLC ale căror elemente ideale sînt legate în serie sau în paralel.

Se vor analiza în continuare, circuitele electrice (mai importante) cu elemente legate în serie sau paralel.

5.5.1. Circuitul RL serie

Se consideră circuitul electric serie compus din rezistor ideal de rezistenţă R şi bobina ideală de inductivitate L (fig. 5.42), parcurs de curentul:

$$i = I\sqrt{2}\ \sin \omega t$$

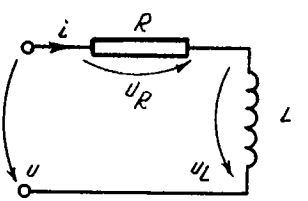


Fig. 5.42. Circuitul RL serie.

Tensiunea la borne u este suma căderilor de tensiune pe cele două elemente:

$$u = u_R + u_L \qquad (5.64)$$

Conform celor stabilite în paragrafele anterioare,

- căderea de tensiune pe elementul R este

$$u_R = R\, i = R\, I \sqrt{2}\, \sin\omega t$$

şi tensiunea la bornele bobinei L este

$$u_L = X_L\, I \sqrt{2}\, \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Folosind reprezentarea în complex, relaţia (5.64) devine:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L \qquad (5.65)$$

în care $\underline{U}_R = R\,\underline{I}$ şi $\underline{U}_L = j\,X_L\,\underline{I}$ conform (5.43) şi (5.50).

Reprezentarea fazorială a mărimilor complexe $\underline{U}$, $\underline{U}_R$ şi $\underline{U}_L$ este redată în fig. 5.43 şi realizată astfel:

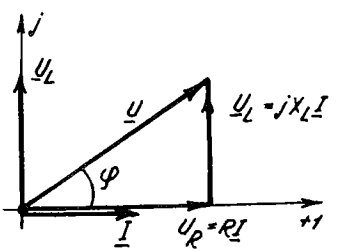


Fig. 5.43. Reprezentarea fazorială a mărimilor complexe $\underline{U}$, $\underline{U}_R$ şi $\underline{U}_L$.

- curentul $\underline{I}$ se reprezintă printr-un fazor orientat după direcţia axei reale + 1 deoarece defazajul $\varphi = 0$;

- fazorul $\underline{U}_R$ are modulul $U_R = R\,I$ şi defazajul faţă de curent egal cu zero; deci se prezintă printr-un fazor coliniar cu fazorul $\underline{I}$ şi de modul $U_R = R\,I$;

- fazorul tensiunii $\underline{U}_L$ se obţine prin rotirea fazorului curentului cu $\frac{\pi}{2}$ în sens antiorar (direct) şi prin amplificarea modulului curentului I cu reactanţa inductivă $X_L = \omega L$; rezultă modulul acestui fazor

$$U_L = X_L \, I = \omega \, L \, I$$

defazat înaintea curentului cu $\frac{\pi}{2}$.

Pentru a se determina fazorul tensiunii la borne $\underline{U}$, se adună vectorial fazorul $\underline{U}_R$ cu fazorul $\underline{U}_L$ astfel:

- din vîrful fazorului $\underline{U}_R$ se trasează fazorul $\underline{U}_L$; prin unirea originii 0 cu vîrful fazorului $\underline{U}_L$, se obţine fazorul tensiunii la borne $\underline{U}$.

Din triunghiul dreptunghic format se scrie:

$$U^2 = I^2 \left(R^2 + X_L^2 \right) \qquad (5.66)$$

sau

$$U = \sqrt{R^2 + X_L^2} \, . \, I = Z I$$

Mărimea:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \qquad (5.67)$$

se numeşte impedanţa circuitului RL.

Defazajul se determină din acelaşi triunghi ;

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L \, I}{R \, I} = \frac{X_L}{R} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arc\ tg} \frac{X_L}{R} \; ;$$

$$\sin \varphi = \frac{X_L \, I}{Z \, I} = \frac{X_L}{Z} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arc\ sin} \frac{X_L}{Z} \; ; \qquad (5.68)$$

$$\cos \varphi = \frac{R \, I}{Z \, I} = \frac{R}{Z} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arc\ cos} \frac{R}{Z} \; ;$$

unghiul φ este pozitiv şi are valori cuprinse între 0 şi $+\frac{\pi}{2}$.

Curentul este defazat în urma tensiunii cu unghiul φ şi are valoarea efectivă:

$$I = \frac{U}{Z} \cdot \tag{5.69}$$

Expresia instantanee a curentului este:

$$i = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sqrt{2} \sin (\omega t - \varphi) \tag{5.70}$$

în care

$$\varphi = \text{arc tg} \frac{\omega L}{R} \cdot \tag{5.71}$$

Triunghiul tensiunilor. Valorile efective ale tensiunilor u_R şi u_L se pot determina din diagrama fazorială:

$$\begin{aligned} U_R &= R\, I = U \cos \varphi \\ U_L &= \omega L\, I = U \sin \varphi \end{aligned} \tag{5.72}$$

Din aceste relaţii, se construieşte triunghiul tensiunilor (fig. 5.44) avînd laturile egale cu valorile efective ale tensiunilor U, U_R şi U_L.

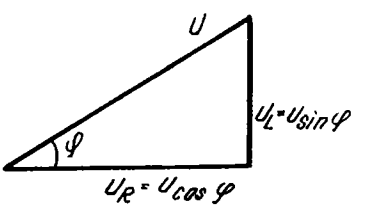


Fig. 5.44. Triunghiul tensiunilor.

Triunghiul impedanţelor. Tot din diagrama fazorială se scrie:

$$R = \frac{U_R}{I} = \frac{U}{I}\cos\varphi = Z\cos\varphi\ ;\ X = \omega L = \frac{U_L}{I} = \frac{U}{I}\sin\varphi = Z\sin\varphi \tag{5.73}$$

Cu ajutorul acestor relaţii, se construieşte triunghiul impedanţelor (fig. 5.45) în care laturile sînt: Z, R şi X_L.

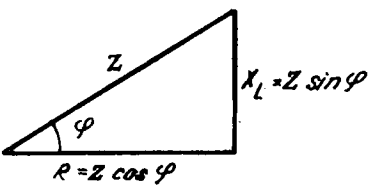


Fig. 5.45. Triunghiul impedanţelor.

Impedanţa complexă. In relaţia:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L \quad \text{se înlocuieşte}$$

$$\underline{U}_R = R\,\underline{I} \quad \text{şi} \quad \underline{U}_L = j\omega L\,\underline{I};$$

se obţine

$$\underline{U} = (R + j\omega L)\,\underline{I} = \underline{Z}\,\underline{I}$$

sau

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z} = R + j\omega L. \tag{5.74}$$

care reprezintă impedanţa complexă.

Reprezentată în planul complex (fig. 5.46), se obţine expresia impedanţei complexe

$$\underline{Z} = Z\, e^{j\varphi} = Z\,(\cos\varphi + j \sin\varphi) \qquad (5.75)$$

sau

$$\underline{Z} = R + j\omega L \quad \text{conform (5.74).}$$

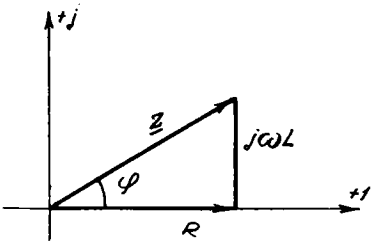


Fig. 5.46. Impedanţa $\underline{Z}$ în planul complex.

5.5.2. Circuitul RC serie

Se consideră circuitul electric serie compus din rezistorul ideal de rezistenţă R şi condensatorul ideal de capacitate C (fig. 5.47). Prin circuit se stabileşte curentul:

$$i = I\sqrt{2}\, \sin\omega t.$$

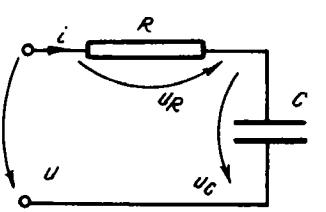


Fig. 5.47. Circuit RC serie.

Tensiunea la borne u este suma căderilor de tensiune pe cele două elemente:

$$u = u_R + u_C . \tag{5.76}$$

Dar căderea de tensiune pe elementul R este

$$u_R = R\, i = R\, I \sqrt{2}\, \sin \omega t$$

şi tensiunea la bornele condensatorului C

$$u_C = X_C\, I \sqrt{2}\, \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) .$$

În complex, relaţia (5.76) devine

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C \tag{5.77}$$

în care

$$\underline{U}_R = R\, \underline{I} \quad \text{şi} \quad \underline{U}_C = -\, j\, X_C\, \underline{I} = -\, \frac{j}{\omega C}\, \underline{I}$$

conform relaţiei (5.43) şi (5.57).

Reprezentarea fazorială a mărimilor complexe $\underline{U}$, $\underline{U}_R$ şi $\underline{U}_C$ este redată în fig. 5.48. Diagrama fazorială s-a construit asemănător construcţiei din paragraful precedent.

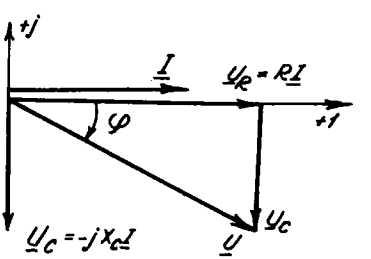


Fig. 5.48. Reprezentarea fazorială a mărimilor complexe $\underline{U}$, $\underline{U}_R$ şi $\underline{U}_C$.

Din triunghiul dreptunghic format se scrie:

$$U^2 = I^2 \left[R^2 + (- X_C)^2 \right] \qquad (5.78)$$

sau

$$U = \sqrt{R^2 + X_C^2}\ I = ZI$$

Mărimea

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \qquad (5.79)$$

reprezintă impedanţa circuitului RC.

Defazajul se determină din acelaşi triunghi:

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{U_C}{U_R} = - \frac{1}{\omega CR} ; \quad \varphi = - \operatorname{arc\ tg} \frac{1}{\omega CR} \qquad (5.80)$$

unghiul φ este negativ şi are valori cuprinse între $- \frac{\pi}{2}$ şi zero.

Triunghiul tensiunilor este redat în fig. 5.49 avînd ca laturi tensiunile: U, U_R şi U_C.

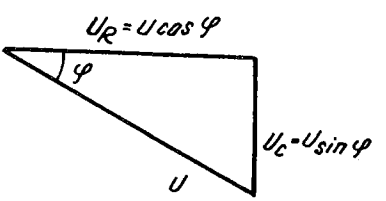


Fig. 5.49. Triunghiul tensiunilor.

Triunghiul impedanţelor este redat în fig. 5.50 în care laturile sînt: Z, R şi X_C.

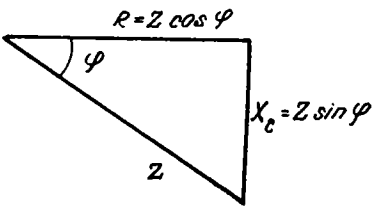


Fig. 5.50. Triunghiul impedanţelor.

Impedanţa complexă. In relaţia

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C$$

se înlocuieşte

$$\underline{U}_R = R\,\underline{I} \quad \text{şi} \quad \underline{U}_C = -\frac{j}{\omega C}\,\underline{I} \;;$$

se obţine:

$$\underline{U} = \left(R - \frac{j}{\omega C}\right)\underline{I} = \underline{Z}\,\underline{I}$$

sau

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z} = R - \frac{j}{\omega C} = R + \frac{1}{j\omega C} \qquad (5.81)$$

care reprezintă impedanţa complexă a circuitului RC.

Reprezentată în planul complex (fig. 5.51), se obţine expresia impedanţei complexe

$$\underline{Z} = Z\, e^{-j\varphi} = Z\,(\cos\varphi - j\,\sin\varphi) \qquad (5.82)$$

sau

$$\underline{Z} = R - \frac{j}{\omega C} = R + \frac{1}{j\omega C}$$

conform relaţiei (5.81).

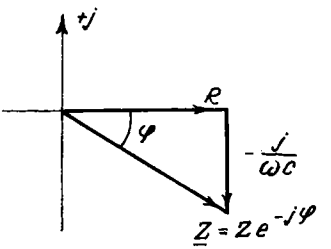


Fig. 5.51. Impedanţa $\underline{Z}$ în planul complex.

5.5.3. Circuitul RLC serie

Elementele pasive ideale sînt legate în serie: rezistorul R, bobina L şi condensatorul C (fig. 5.52).

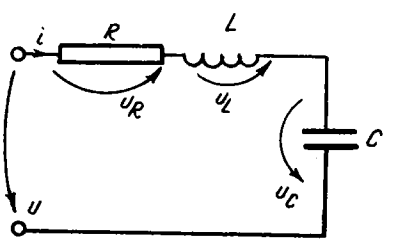


Fig. 5.52. Circuitul RLC serie.

Prin circuit se stabileşte curentul:

$$i = I\sqrt{2}\ \sin\omega t$$

Tensiunea de la bornele circuitului este

$$u = U\sqrt{2}\ \sin\ (\omega t + \varphi)$$

respectiv

$$u = u_R + u_L + u_C \qquad (5.83)$$

în care:

$$u_R = R\ I\sqrt{2}\ \sin\omega t,$$

$$u_L = X_L\ I\sqrt{2}\ \sin\ (\omega t + \frac{\pi}{2}),$$

$$u_C = X_C\ I\sqrt{2}\ \sin\ (\omega t - \frac{\pi}{2})$$

reprezintă tensiunile repartizate pe cele trei elemente R, L şi C.

In complex, relaţia (5.83) devine

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C \qquad (5.84)$$

în care:

$$\underline{U}_R = R\,\underline{I}\ \ ;\ \underline{U}_L = j\ .\ X_L\,\underline{I} = j\omega L\,\underline{I}\ \ ;$$

$$\underline{U}_C = -\ j\ X_C\,\underline{I} = -\ \frac{j}{\omega C}\,\underline{I}\ \ ;$$

conform relaţiilor (5.43), (5.50) şi (5.57).

Reprezentarea fazorială a mărimilor complexe $\underline{U}$, $\underline{U}_R$, $\underline{U}_L$ şi $\underline{U}_C$ este redată în fig. 5.53. Din triunghiul dreptunghic format se scrie:

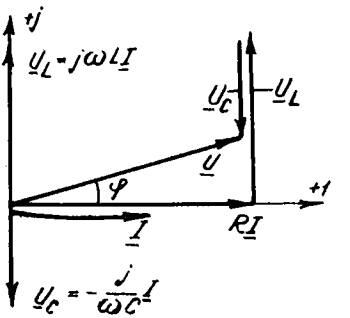


Fig. 5.53. Reprezentarea fazorială a mărimilor complexe $\underline{U}$, $\underline{U}_R$, $\underline{U}_L$ şi $\underline{U}_C$.

$$U^2 = I^2 \left[R^2 + (X_L - X_C)^2\right] \quad \text{sau} \quad U = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}\, I = ZI \tag{5.85}$$

în care mărimea

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{5.86}$$

se numeşte impedanţa circuitului RLC.

Defazajul rezultă tot din triunghiul dreptunghic;

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{(X_L - X)I}{R\,I} = \frac{X_L - X_C}{R} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arc\ tg}\ \frac{X_L - X_C}{R} \tag{5.87}$$

sau

$$\varphi = \operatorname{arc\ tg}\ \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R};$$

unghiul φ are valori cuprinse între $-\frac{\pi}{2}$ şi $+\frac{\pi}{2}$.

Curentul este defazat în urma tensiunii ($0 < \varphi < + \frac{\pi}{2}$; circuit inductiv), înaintea tensiunii ($0 < \varphi < - \frac{\pi}{2}$; circuit capacitiv) sau în fază cu tensiunea ($\varphi = 0$; circuit rezonant).

Valoarea efectivă a curentului este

$$I = \frac{U}{Z} \cdot$$

Expresia instantanee a curentului este

$$i = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \sqrt{2} \sin (\omega t \pm \varphi) \quad (5.88)$$

în care

$$\varphi = \text{arc tg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \cdot \quad (5.89)$$

Impedanţa complexă. Relaţia (5.83) scrisă în complex devine

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + U_C \quad (5.90)$$

în care

$$\underline{U}_R = R \underline{I}; \underline{U}_L = j X_L \underline{I} = j \omega L \underline{I} \text{ şi}$$

$$\underline{U}_C = - j X_C \underline{I} = - \frac{j}{\omega C} \underline{I} = \frac{1}{j \omega C} \underline{I}$$

conform relaţiilor (5.44), (5.50) şi (5.57).

Se obţine

$$\underline{U} = \left[R + j (X_L - X_C) \right] \underline{I} = \left[R + j (\omega L - \frac{1}{\omega C}) \right] \underline{I} \cdot \quad (5.91)$$

Mărimea

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + j\,(X_L - X_C) = R + j\,(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \qquad (5.92)$$

reprezintă impedanţa complexă a circuitului RLC serie care se pune şi sub forma

$$\underline{Z} = Z\, e^{-j\varphi} = Z\,(\cos\varphi - j \sin\varphi) \qquad (5.93)$$

sau

$$\underline{Z} = R + j\,(\omega L - \frac{1}{\omega C}),$$

conform (5.92).

5.54. Circuitul RLC paralel

In acest caz, elementele pasive ideale: rezistorul R, bobina L şi condensatorul C sînt legate în paralel (fig. 5.54).

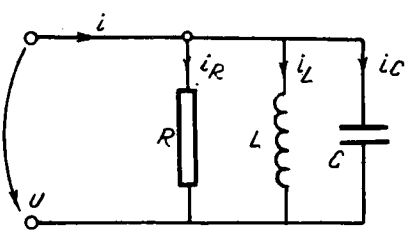


Fig. 5.54. Circuitul RLC paralel.

Curentul care intră pe la bornele circuitului RLC paralel este o sumă a curenţilor din elementele ideale de circuit:

$$i = i_R + i_L + i_C \qquad (5.94)$$

Tensiunea de la bornele circuitului se aplică pe fiecare element de circuit în parte.

Dacă această tensiune este

$$u = U\sqrt{2}\ \sin\omega t,$$

curenţii prin elementele R, L, C vor fi:

$$i_R = \frac{U}{R}\sqrt{2}\ \sin\omega t\ ,$$

$$i_L = \frac{U}{X_L}\sqrt{2}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{U}{\omega L}\ \sqrt{2}\ \sin\ (\omega t - \frac{\pi}{2})$$

şi

$$i_C = \frac{U}{X_C}\ 2\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \omega CU\ \sqrt{2}\ \sin\ (\omega t + \frac{\pi}{2})\ .$$

Curentul total va fi:

$$i = I\sqrt{2}\ \sin\ (\omega t + \varphi).$$

Ln complex, relaţia (5.94) se scrie

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C \qquad (5.95)$$

în care:

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}}{R}\ ;\ \underline{I}_L = \frac{\underline{U}}{j\,X_L} = \frac{\underline{U}}{j\omega L}$$

şi

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}}{j\,X_C} = -\frac{\underline{U}}{\frac{j}{\omega C}} = j\omega C\ \underline{U}\ .$$

Reprezentarea fazorială a mărimilor complexe: $\underline{I}$, $\underline{I}_R$, $\underline{I}_L$ şi $\underline{I}_C$ este redată în fig. 5.55.

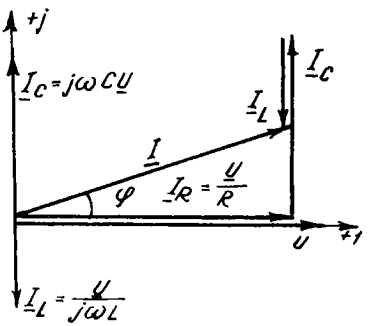


Fig. 5.55. Reprezentarea fazorială a mărimilor complexe: $\underline{I}$, $\underline{I}_R$, $\underline{I}_L$ şi $\underline{I}_C$.

Din triunghiul dreptunghic format se scrie:

$$I^2 = U^2 \left[\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2 \right] \qquad (5.96)$$

sau

$$I = U \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2} = \frac{U}{Z}$$

în care mărimea

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}} \qquad (5.97)$$

este impedanţa circuitului RLC paralel.

Rezultă şi admitanţa acestui circuit:

$$Y = \frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2} \; . \qquad (5.98)$$

Defazajul se deduce din

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{\frac{1}{R}} = \frac{R}{\omega L} - \omega CR$$

şi defazajul este:

$$\varphi = \operatorname{arc\ tg}\left(\frac{R}{\omega L} - \omega CR\right). \qquad (5.99)$$

Impedanţa complexă a circuitului RLC paralel.

Din

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C$$

se obţine prin următoarele înlocuiri: $\underline{I}_R = \frac{\underline{U}}{R}$; $\underline{I}_L = \frac{\underline{U}}{jX_L}$ şi $\underline{I}_C = -\frac{\underline{U}}{jX_C}$,

expresia:

$$\underline{I} = \underline{U}\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{jX_L} - \frac{1}{jX_C}\right] = \underline{U}\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{j}\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)\right]$$

Iar impedanţa complexă rezultă:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j}\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)} . \qquad (5.100)$$

Admitanţa complexă este:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j}\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right). \qquad (5.101)$$

5.6. Rezonanţa în circuite electrice de curent alternativ sinusoidal

Fenomenul de rezonanţă electrică se constată în circuitele electrice cu elemente de circuit inductive (bobine) şi elemente de circuit capacitive (condensatoare) alimentate cu tensiuni electrice alternative.

Condiţia de rezonanţă este îndeplinită cînd

$$X_L = X_C$$

în care:

X_C - reactanţa capacitivă ;

X_L - reactanţa inductivă.

Egalitatea este îndeplinită pentru o anumită frecvenţă f_o denumită frecvenţă de rezonanţă.

După felul în care sînt legate elementele de circuit, rezonanţa poate fi:

- rezonanţa serie (tensiunilor) ;
- rezonanţa paralel (curenţilor).

Se vor studia pe rînd aceste două rezonanţe electrice.

5.6.1. Rezonanţa serie

Pentru circuitul electric de curent alternativ sinusoidal (fig. 5.56) s-au stabilit în paragraful 5.53. următoarele:

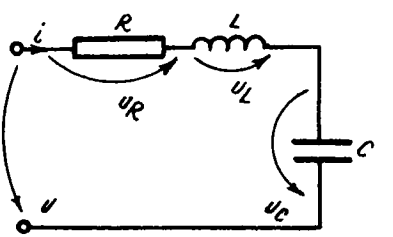


Fig. 5.56. Circuit electric cu rezonanţă serie.

- tensiunea electrică

$$u = U\sqrt{2}\ \sin\ (\omega t + \varphi) ;$$

- curentul electric

$$i = I\sqrt{2}\ \sin\omega t\ ;$$

- impedanţa

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\ ;$$

şi defazajul

$$\varphi = \text{arc tg}\ \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\ .$$

Intre valorile efective ale tensiunii U şi curentului I există următoarea relaţie:

$$U = Z\ I\ .$$

Valorile efective ale tensiunilor de pe cele trei elemente R, L şi C sînt:

$$U_R = R\ I\ \ ;\ \ U_L = \omega L\ I\ \text{şi}\ \ U_C = \frac{I}{\omega C}$$

iar pulsaţia este

$$\omega = 2\pi f\ .$$

La rezonanţă se realizează condiţia:

$$X_L = X_C$$

sau

$$2\pi f_o L = \frac{1}{2\pi f_o C}$$

în care s-a notat cu f_o frecvenţa de rezonanţă şi care este

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \cdot \qquad (5.102)$$

Relaţia este cunoscută sub numele de "formula lui Thomson".

Din formula lui Thomson se constată că fenomenul de rezonanţă apare într-un circuit electric de curent alternativ atunci cînd:

- circuitul electric este alimentat cu o tensiune sinusoidală de frecvenţă f_o, inductivitatea L şi capacitatea C fiind date;
- inductivitatea L şi capacitatea C sînt modificate pînă se obţine frecvenţa de rezonanţă f_o.

Defazajul dintre tensiune şi curent devine egal cu zero:

$$\varphi = \text{arc tg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \text{arc tg } 0 = 0^o. \qquad (5.103)$$

Impedanţa circuitului va fi:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = R \qquad (5.104)$$

adică circuitul se comportă rezistiv.

Rezultă că la rezonanţă, tensiunea şi curentul sînt în faza ($\varphi = 0$):

$$u = U\sqrt{2}\ \sin\omega t\ , \qquad (5.105)$$

$$i = \frac{U}{R}\sqrt{2}\ \sin\omega t$$

şi curentul creşte la rezonanţă pentru că impedanţa se micşorează, devenind egală cu rezistenţa circuitului.

Dacă rezistenţa este mică, se obţin valori foarte ridicate pentru curentul electric.

Diagrama fazorială este reprezentată în fig. 5.57.

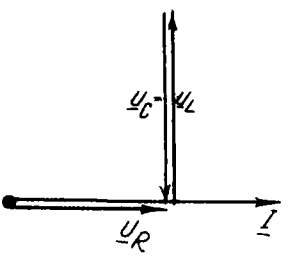


Fig. 5.57. Diagrama fazorială la rezonanţa serie.

Se observă că tensiunile de pe inductivitate şi condensator devin egale şi au valori foarte mari, practic necontrolate:

$$U_L = U_C \cdot$$

In aplicaţiile tehnice, aceste tensiuni devin periculoase pentru izolaţia bobinei sau pentru dielectricul condensatorului (apare fenomenul de străpungere electrică).

Pentru caracterizarea unui circuit rezonant s-au introdus următoarele mărimi:

Impedanţa caracteristică reprezintă valoarea reactanţei inductive respectiv a reactanţei capacitive la rezonanţă:

$$Z_c = 2\pi f_o L = \frac{1}{2\pi f_o C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (5.106)$$

Factorul de calitate este raportul dintre impedanţa caracteristică şi rezistenţa electrică a circuitului.

Se notează:

$$Q = \frac{Z_c}{R} = \frac{2\pi f_o L}{R} = \frac{1}{2\pi f_o CR} \qquad (5.107)$$

Acesta este cu atît mai mare cu cît rezistenţa circuitului este mai mică faţă de impedanţa caracteristică.

In circuitele rezonante folosite în radiotehnică, factorul de calitate atinge valori mari, de ordinul sutelor. Din acest motiv, circuitele cu rezonanţă de tensiune pot fi utilizate la amplificarea unor tensiuni slabe.

Factorul de amortizare este valoarea inversă a factorului de calitate:

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{Z_c} \cdot \qquad (5.108)$$

Caracteristica de frecvenţă reprezintă dependenţa dintre impedanţa circuitului rezonant şi frecvenţă (fig. 5.58).

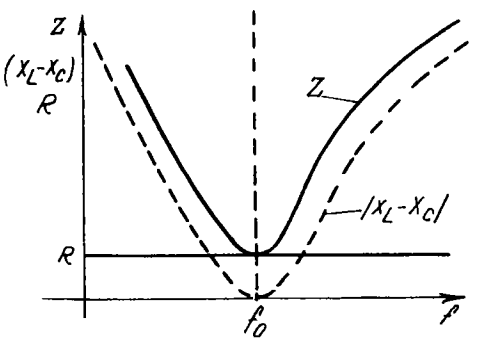


Fig. 5.58. Caracteristica de frecvenţă la rezonanţa serie.

Se disting următoarele:

a. $f < f_0$. Cînd frecvenţa tinde către zero, termenul

$$X_L = 2\pi f L$$

tinde către zero, dar

devine foarte mare. La frecvenţa f = 0, impedanţa devine infinită şi curentul prin circuit devine nul. Unghiul de defazaj este

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ radiani.}$$

b. $f = f_o$. La rezonanţă, impedanţa circuitului este minimă şi egală cu rezistenţa R a circuitului rezonant. Defazajul $\varphi = 0$.

c. $f > f_o$. Cînd frecvenţa devine foarte mare reactanţa inductivă

$$X_L = 2\pi fL$$

creşte foarte mult iar reactanţa capacitivă

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC}$$

tinde spre zero;

- unghiul de defazaj φ tinde către $+\frac{\pi}{2}$.

Caracteristica de fază reprezintă dependenţa dintre unghiul de defazaj al circuitului rezonant şi frecvenţă (fig. 5.59).

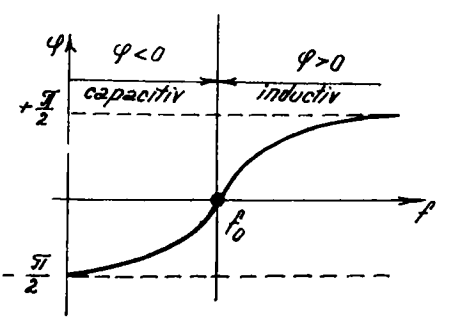


Fig. 5.59. Caracteristica de fază la rezonanţa serie.

Pentru:

a. $f < f_o$. Unghiul de defazaj $\varphi < 0$ şi circuitul are caracter capacitiv.

b. $f = f_o$. Unghiul de defazaj $\varphi = 0$; circuitul are caracter rezistiv şi prezintă fenomenul de rezonanţă.

c. $f > f_o$. Unghiul de defazaj $\varphi > 0$; circuitul electric are caracter inductiv.

Curba de rezonanţă reprezintă dependenţa dintre tensiunea circuitului rezonant, respectiv dintre tensiunile pe condensator, pe bobină şi frecvenţă (fig. 5.60); se disting următoarele:

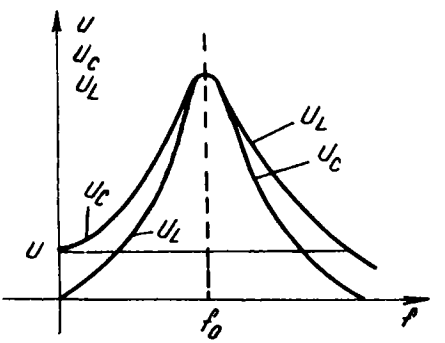


Fig. 5.60. Curba de rezonanţă la rezonanţa serie.

a. $f < f_o$. Curentul prin circuit este zero pentru frecvenţa nulă.

Tensiunea sinusoidală de alimentare se repartizează pe capacitate,

$$U = U_C ;$$

cînd creşte frecvenţa, curentul creşte prin circuit dar

$$U_L < U_C .$$

Circuitul se comportă capacitiv.

b. $f = f_o$. Curentul prin circuit devine maxim, impedanţa este minimă şi egală cu rezistenţa circuitului rezonant ($Z = R$).

Cu cît circuitul rezonant are un factor de calitate mai bun, cu atît curentul este mai mare la rezonanţă, curba de rezonanţă este mai "ascuţită" (v. fig. 5.61).

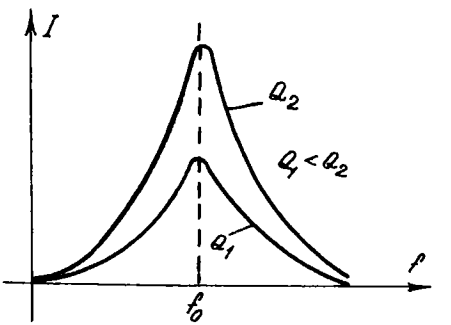


Fig. 5.61. Curba de selectivitate la rezonanţa serie.

Tensiunile $U_C = U_L$ capătă valori foarte mari, periculoase pentru circuitul rezonant.

c. $f > f_o$. Curentul prin circuit scade şi tinde la zero cînd frecvenţa creşte foarte mult. Cînd frecvenţa devine foarte mare, tensiunea pe capacitate U_C tinde către zero, aceasta comportîndu-se ca un "scurtcircuit".

Selectivitatea este o altă mărime caracteristică a unui circuit rezonant. Se spune că un circuit rezonant este cu atît mai selectiv cu cît este mai mare factorul de calitate Q adică cu cît curba de rezonanţă este mai ascuţită (vezi fig. 5.61).

5.6.2. Rezonanţa paralel

Fenomenul de rezonanţă paralel apare în circuitul electric de curent alternativ din fig. 5.62 în care elementele de circuit sînt legate în paralel. Conform celor stabilite în paragraful 5.5.4 rezultă că:

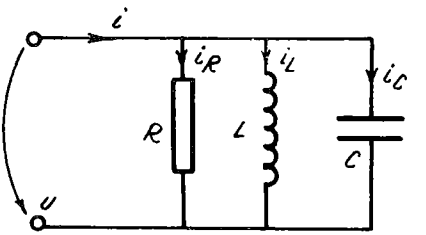


Fig. 5.62. Circuitul electric cu rezonanţă paralel.

- tensiunea electrică este

$$u = U\sqrt{2}\ \sin \omega t\ ;$$

- curentul electric,

$$i = I\sqrt{2}\ \sin\ (\omega t + \varphi\ )\ ;$$

- admitanţa,

$$Y = \sqrt{(\frac{1}{R})^2 + (\frac{1}{\omega L} - \omega C)^2}\ ;$$

- defazajul,

$$\varphi = \text{arc tg}\ (\frac{R}{\omega L} - \omega CR).$$

Intre valorile efective ale tensiunii U şi curentului I există relaţia:

$$I = Y\ U\ . \qquad (5.109)$$

Valorile efective ale curenţilor care străbat cele trei elemente R, L şi C sînt:

$$I_R = \frac{U}{R} \quad ; \quad I_L = \frac{U}{\omega L} \quad \text{şi} \quad I_C = \omega CU \qquad (5.110)$$

iar pulsaţia este $\omega = 2\pi f$.

La rezonanţă, se realizează condiţia

$$X_L = X_C \qquad (5.111)$$

adică

$$2\pi f_o L = \frac{1}{2\pi f_o C}$$

în care f_o reprezintă frecvenţa de rezonanţă şi are aceeaşi expresie ca şi în cazul circuitului rezonant serie:

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad (5.112)$$

(formula lui Thomson).

De asemenea, condiţiile de apariţie a fenomenului de rezonanţă paralel sînt aceleaşi ca şi la rezonanţa serie (vezi paragraful 5.6.1).

Defazajul dintre tensiune şi curent devine egal cu zero;

$$\varphi_{f = f_o} = \text{arc tg } R(\frac{1}{\omega L} - \omega C) = \text{arc tg } 0 = 0^o \qquad (5.113)$$

pentru că la rezonanţă

$$\frac{1}{\omega L} = \omega C.$$

Admitanţa circuitului va fi la rezonanţă

$$Y_{f=f_o} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2} = \frac{1}{R} \qquad (5.114)$$

şi impedanţa $Z = R$ (pentru $f = f_o$).

Circuitul electric la rezonanţă este rezistiv.

Rezultă că şi la rezonanţa paralel, tensiunea şi curentul sînt în fază ($\varphi = 0$), adică

$$u = U\sqrt{2}\ \sin \omega t$$

şi

$$i_{f=f_o} = \frac{U}{R}\sqrt{2}\ \sin\ (\omega t + 0^o) = \frac{U}{R}\sqrt{2}\ \sin \omega t \qquad (5.115)$$

Diagrama fazorială este redată în fig. 5.63.

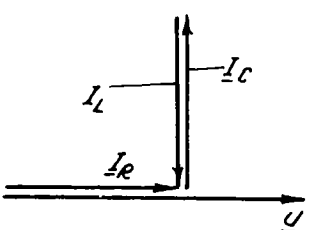


Fig. 5.63. Diagrama fazorială la rezonanţa paralel.

Curenţii $\underline{I}_L$ şi $\underline{I}_C$ care străbat inductivitatea L şi capacitatea C devin egali şi de sens contrar adică există o circulaţie de curent între bobină şi condensator. Prin bornele circuitului intră numai curentul $\underline{I}_R$.

Pentru a caracteriza rezonanţa paralel, se introduc mărimile:

Admitanţa caracteristică

$$Y_C = \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{2\pi f_o L} = 2\pi f_o C \qquad (5.116)$$

este egală cu admitanţa inductivă sau admitanţa capacitivă la rezonanţă.

Factorul de calitate este produsul dintre admitanţa caracteristică Y_C şi rezistenţa electrică a circuitului rezonant R adică:

$$Q = \frac{R}{2\pi f_o L} = 2\pi f_o CR \ . \qquad (5.117)$$

Factorul de amortizare este valoarea inversă a factorului de calitate:

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{1}{RY_C} \ . \qquad (5.118)$$

Caracteristica de frecvenţă reprezintă dependenţa dintre admitanţa circuitului rezonant şi frecvenţă (fig. 5.64).

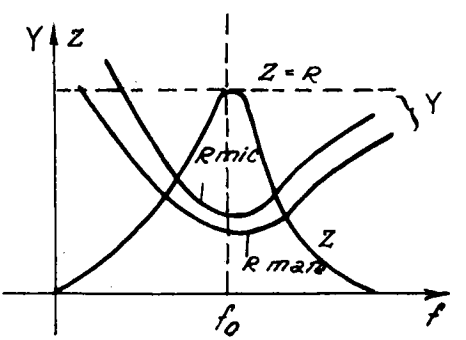


Fig. 5.64. Caracteristica de frecvenţă la rezonanţa paralel.

La frecvenţa de rezonanţă $f = f_o$, admitanţa are valoare minimă

$$Y_{f = f_o} = \frac{1}{R} \qquad (5.119)$$

iar impedanţa devine maximă:

$$Z_{f = f_o} = R \qquad (5.120)$$

Pentru $f > f_o$ sau $f < f_o$, admitanţa creşte şi impedanţa se micşorează.

Caracteristica de fază reprezintă dependenţa dintre unghiul de defazaj φ al circuitului rezonant şi frecvenţă (fig. 5.65).

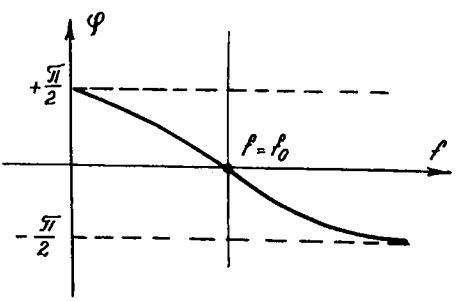


Fig. 5.65. Caracteristica de fază la rezonanţa paralel.

Curba de rezonanţă reprezintă dependenţa dintre curentul circuitului rezonant şi frecvenţă (fig. 5.66).

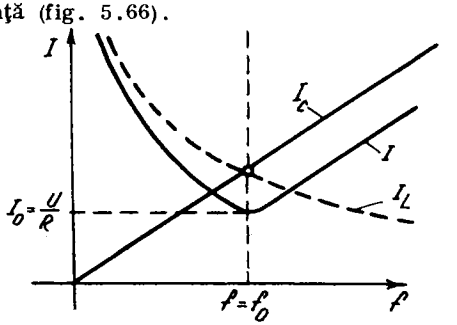


Fig. 5.66. Curba de rezonanţă la rezonanţa paralel.

La rezonanţă, $f = f_o$, curentul circuitului rezonant este minim:

$$I_o = \frac{U}{R} \qquad (5.121)$$

Curenţii prin bobină şi prin condensator ajung însă la valorile lor maxime şi sînt de Q ori mai mari decît curentul $I_o = \frac{U}{R}$ absorbit la rezonanţă;

- curentul prin bobină:

$$I_{L\,f = f_o} = \frac{U}{2\pi f_o L} = \frac{RI_o}{2\pi f_o L} = QI_o \; ; \qquad (5.122)$$

- curentul prin condensator:

$$I_{C\,f = f_o} = 2\pi f_o CU = 2\pi f_o CRI_o = QI_o \qquad (5.123)$$

în care

$$Q = \frac{R}{2\pi f_o L} = 2\pi f_o CR \qquad (5.124)$$

reprezintă factorul de calitate.

Se observă că la rezonanţă ($f = f_o$), curentul prin bobina I_L este egal cu cel prin condensator I_C şi au valoare maximă. De aceea, rezonanţa în circuitul paralel se numeşte <u>rezonanţă de curent</u>.

5.6.3. <u>Rezonanţa multiplă</u>

După cum s-a prezentat în paragrafele precedente, la rezonanţa serie (de tensiune) impedanţa circuitului devine minimă şi curentul prin circuit

este maxim pentru frecvenţa de rezonanţă. In cazul rezonanţei paralel (de curent) se întîmplă invers: impedanţa devine maximă iar curentul obţinut este minim.

In circuitele electrice cu elemente de circuit legate şi în alte moduri, pot să apară condiţii în care să se producă rezonanţă de tensiune şi rezonanţă de curent.

Pot apare următoarele situaţii:

- defazajul dintre tensiunea la borne şi curentul absorbit să fie zero;
- impedanţa echivalentă a circuitului este minimă (rezonanţa de tensiune) sau maximă (rezonanţă de curent).

In aceste situaţii există mai multe frecvenţe de rezonanţă şi regimul este de rezonanţă multiplă.

5.6.4. Ferorezonanţa

Curentul alternativ printr-o bobină fără miez magnetic variază proporţional cu tensiunea de la bornele bobinei (inductivitatea bobinei L = constantă) (fig. 5.67):

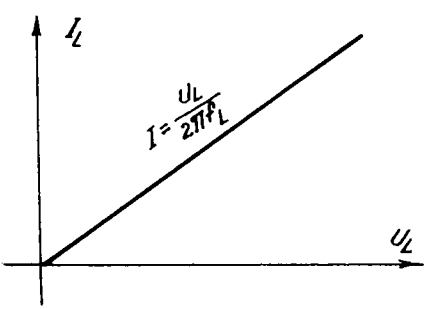


Fig. 5.67. $I = f(U_L)$ într-o bobină fără miez de fier.

$$I = \frac{U_L}{2\pi f L} \qquad (5.125)$$

în care I reprezintă valoarea efectivă a curentului care străbate bobina iar U_L este valoarea efectivă de la bornele bobinei.

Cînd bobina este cu miez magnetic (ex.: fier) pentru frecvenţă f = constantă, curentul electric alternativ din bobină variază neliniar cu tensiunea de la bornele bobinei (fig. 5.68). De la o anumită valoare a curentului electric,

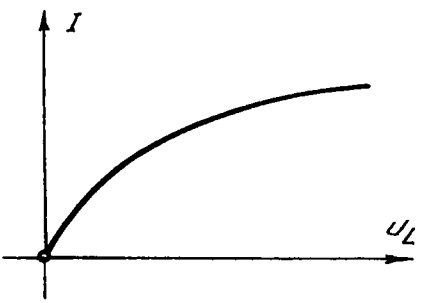


Fig. 5.68. $I = f(U_L)$ într-o bobină cu miez de fier.

tensiunea la bornele bobinei cu miez magnetic devine constantă; apare fenomenul de saturaţie magnetică studiat în capitolul 4.

In acest caz, inductivitatea bobinei cu miez magnetic nu mai este constantă, depinde de starea de magnetizare a miezului bobinei.

Se studiază în continuare fenomenul de rezonanţă într-un circuit serie $RL_{Fe}C$ în care bobina are miez magnetic şi tensiunea de alimentare a circuitului $RL_{Fe}C$ are frecvenţa constantă. Din schema electrică a circuitului (fig. 5.69 a) şi din diagrama fazorială (fig. 5.69 b) se scrie relaţia dintre valorile efective ale tensiunilor:

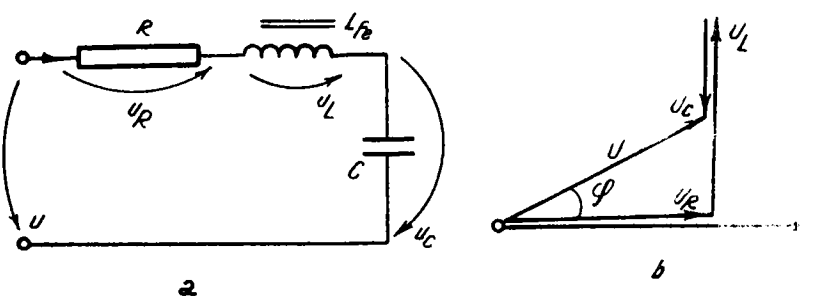


Fig. 5.69. a. Circuit $RL_{Fe}C$; b. Diagrama fazorială a circuitului $RL_{Fe}C$.

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} \qquad (5.126)$$

Dacă se reprezintă grafic tensiunile U, U_R, U_L şi U_C în funcţie de valoarea efectivă a curentului I care străbate circuitul, se obţin curbele din fig. 5.70.

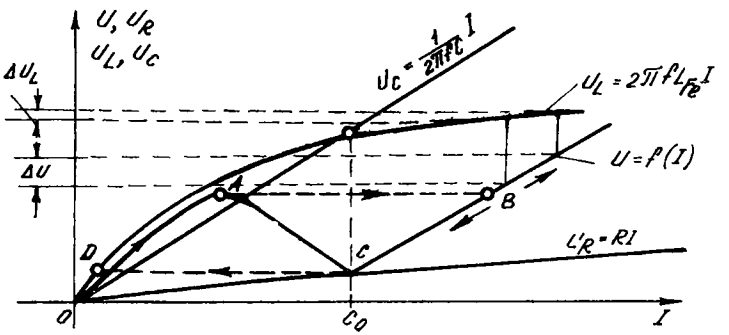


Fig. 5.70. Reprezentarea grafică a tensiunilor U_R, U_L, U_C şi U din circuitul $RL_{Fe}C$.

Din relaţia (5.126) se determină tensiunea la bornele circuitului $RL_{Fe}C$ care în fig. 5.70 este reprezentată de curba OACB. Această curbă redă modul în care se modifică curentul în circuit atunci cînd tensiunea la bornele circuitului variază după curba OACB. Pentru o valoare dată a curentului (punctul C_o), tensiunea la bornele inductivităţii L este egală şi de semn contrar cu tensiunea la bornele condensatorului C

$$U_L = U_C$$

sau

$$2\pi f L_{Fe} I = \frac{1}{2\pi f C} I \ . \qquad (5.127)$$

Din această relaţie, la o frecvenţă dată, se obţine valoarea inductivităţii L_{Fe} pentru care în circuitul respectiv apare fenomenul de rezonanţă.

$$L_{Fe} = \frac{1}{(2\pi f)^2 C} \qquad (5.128)$$

Pentru că circuitul $RL_{Fe}C$ conţine o bobină cu miez magnetic - foarte răspîndit este miezul din fier - fenomenului de rezonanţă i s-a spus ferorezonanţă.

Funcţionarea circuitului ferorezonant. La creşterea tensiunii de la bornele circuitului $RL_{Fe}C$, curentul creşte după porţiunea de curbă OA.

La o creştere foarte mică a tensiunii la borne U, punctul de funcţionare trece din A în B. Are loc un salt brusc de curent şi defazaj, circuitul devine capacitiv ($U_C > U_L$). Dacă în jurul punctului de funcţionare B, tensiunea variază cu ΔU, se produce o variaţie foarte mică a tensiunii de la bornele bobinei L_{Fe} ($\Delta U_L \simeq 0$; U_L = constantă) (vezi fig. 5.70).

Pentru valori descrescătoare ale tensiunii la borne, punctul de funcţionare se deplasează de la B pînă în C şi mai departe prin salt trece în D. Si în acest caz are loc un salt de curent şi variaţia bruscă a fazei.

Utilizarea circuitului ferorezonant. Bobina L_{Fe} poate constitui înfăşurarea primară a unui transformator. In acest caz, cu toate că tensiunea de alimentare a circuitului primar variază, tensiunea secundară obţinută din transformarea tensiunii constante de la bornele bobinei cu miez de fier rămîne de asemenea constantă (fig. 5.71).

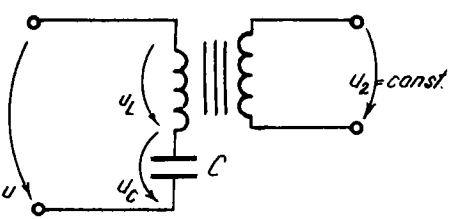


Fig. 5.71. Circuit ferorezonant.

S-a considerat că rezistenţa bobinei primare a transformatorului este nulă.

5.7. Puterea în curent alternativ sinusoidal

S-a definit în paragrafele anterioare noţiunea de putere instantanee p, ca fiind produsul dintre valoarea instantanee a tensiunii electrice u şi valoarea instantanee a curentului electric i:

$$p = u\, i\,.$$

In continuare, se va determina expresia puterii electrice în cazul elementelor simple de circuit pentru tensiuni şi curenţi cu variaţie sinusoidală în timp.

Rezistorul electric. Puterea electrică primită pe la borne de un rezistor electric are expresia:

$$p = u_R\, i = R\, i^2 \geqslant 0\,.$$

Această putere electrică se transformă ireversibil în căldură dezvoltată în rezistor.

Valoarea medie pe o perioadă a puterii instantanee se determină prin calcul ca fiind expresia:

$$P = R\, I^2 \qquad (5.129)$$

în care:

P - valoarea medie a puterii;

R - rezistenţa electrică a rezistorului;

I - valoarea efectivă a curentului care străbate rezistorul.

Această putere se mai numeşte şi putere activă şi nu este legată numai de căldura degajată în rezistoare. Are următoarea definiţie:

Puterea activă este valoarea medie pe o perioadă a puterii instantanee. Se notează cu P.

Unitatea de măsură pentru puterea activă se numeşte watt (W).

Se folosesc şi următorii multipli :

Kilowatt (kW) $1\ kW = 10^3\ W$

Megawatt (MW) $1\ MW = 10^6\ W$

Variaţia în timp a puterii instantanee este reprezentată grafic în fig. 5.72.

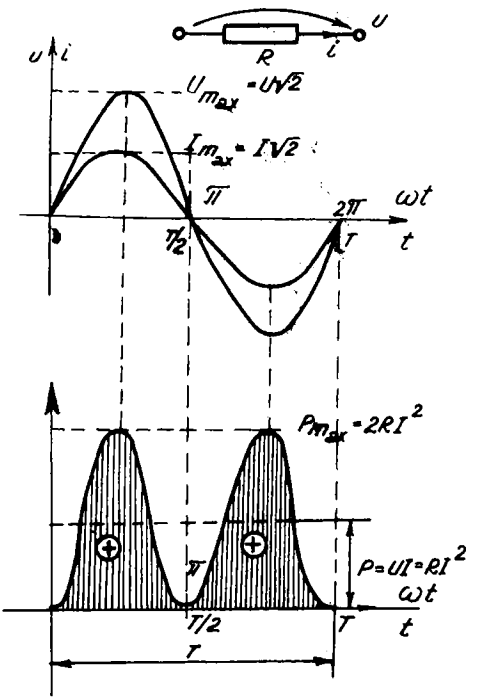


Fig. 5.72. Variaţia puterii instantanee şi energiei în rezistor.

Tensiunea electrică respectiv curentul electric sînt în fază, defazajele fiind nule:

$$u = U\sqrt{2}\ \sin \omega t,$$

$$i = I\sqrt{2}\ \sin \omega t$$

iar $\beta = \vartheta = 0$.

Energia electrică primită într-un interval de o perioadă este:

$$W_T = P\ T \qquad (5.130)$$

şi reprezintă aria haşurată din fig. 5.72. Se numeşte energie activă.

Unitatea de măsură pentru energia activă este watt-secunda (Ws).

Se folosesc următorii multipli :

Watt-oră (Wh)	1 Wh = 3.600 Ws
kilowatt-oră (kWh)	1 kWh = 3,6 . 10^6 Ws

Bobina ideală. Puterea instantanee schimbată pe la borne de o bobină ideală este

$$p = u_L\ i$$

în care:

$u_L = U\sqrt{2}\ \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ tensiunea la bornele bobinei

şi $i = I\sqrt{2}\ \sin \omega t$ curentul electric prin bobină ;

tensiunea efectivă $U = \omega L\ I$.

Puterea instantanee se scrie:

$$p = u_L\ i = 2\ \omega L\ I^2\ \sin \omega t\ .\ \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) .$$

Dar

$$2\ \sin \omega t\ .\ \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \sin 2\ \omega t$$

Deci

$$p = \omega L\ I^2\ \sin 2\omega t\ .$$

Puterea instantanee schimbată de bobina ideală pe la borne variază sinusoidal în timp cu frecvenţă dublă (fig. 5.73.).

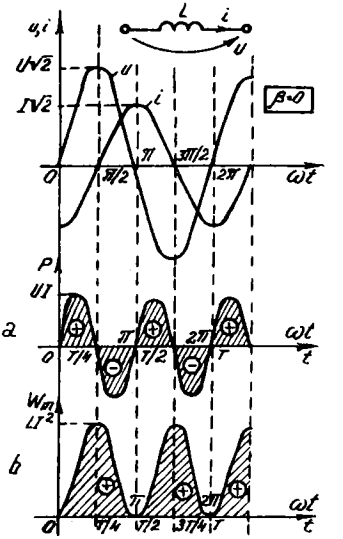


Fig. 5.73. Variaţia puterii instantanee şi energiei în bobina ideală.

Această variaţie are următoarea semnificaţie:

a. O perioadă a puterii instantanee reprezintă o semiperioadă a tensiunii sau curentului.

b. Intr-o semiperioadă, puterea are semnul plus adică este primită de bobină iar în semiperioada următoare, bobina cedează puterea pe la borne.

Prin urmare, în medie pe o perioadă puterea instantanee este nulă. Deci puterea activă este nulă.

Această putere care oscilează de la borne către bobină şi invers, se numeşte putere reactivă inductivă.

Se notează cu Q_L şi are expresia:

$$Q_L = \omega L I^2 = X_L I^2 \qquad (5.131)$$

Unitatea de măsură este VAr (volt amper-reactiv).

Energia magnetică. Expresia energiei magnetice este

$$W_m = \frac{1}{2} L i^2. \qquad (5.132)$$

Variaţia în timp este redată în fig. 5.73; se observă următoarele:

- cînd puterea instantanee este pozitivă (interval 0 la $\frac{T}{4}$) energia magnetică acumulată în bobină creşte de la zero la valoarea maximă $L I^2$;
- cînd puterea instantanee este negativă (interval $\frac{T}{4}$ la $\frac{T}{2}$) energia magnetică acumulată descreşte de la valoarea maximă la zero.

In concluzie, bobina ideală schimbă energia magnetică pe la borne fără să o consume.

Valoarea medie a energiei magnetice în timp de o perioadă este

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2. \qquad (5.133)$$

Condensatorul ideal. Puterea instantanee schimbată pe la borne de condensatorul ideal este

$$p = u_C i \qquad (5.134)$$

în care

$$u_C = U\sqrt{2} \sin \omega t$$

şi

$$i = I\sqrt{2} \sin (\omega t + \frac{\pi}{2})$$

iar între valoarea efectivă a tensiunii şi valoarea efectivă a curentului electric, există următoarea legătură:

$$U = X_C I = \frac{1}{\omega C} I \quad \text{sau}$$

$$I = \omega C U . \qquad (5.135)$$

Rezultă pentru puterea instantanee următoarea expresie:

$$p = u_C\, i = \omega C U^2\, 2 \quad \sin \omega t \,.\, \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad p = \omega C U^2 \sin 2\,\omega t\,. \tag{5.136}$$

Puterea instantanee schimbată de condensatorul ideal pe la borne variază sinusoidal în timp cu frecvenţă dublă (fig. 5.74).

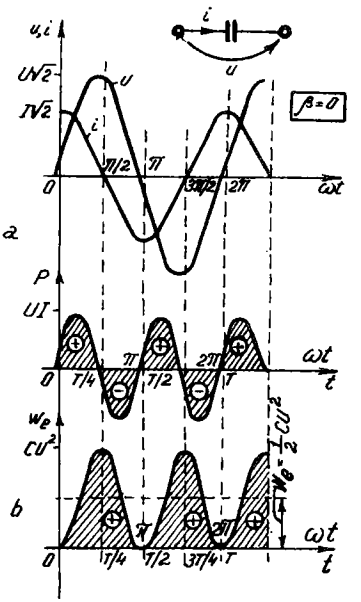


Fig. 5.74. Variaţia puterii instantanee şi energiei în condensatorul ideal.

Variaţia puterii instantanee are aceiaşi semnificaţie ca şi la bobina ideală adică:

a. O perioadă a puterii instantanee reprezintă o semiperioadă a tensiunii sau a curentului ;

b. Intr-o semiperioadă,puterea are semnul plus adică este primită de condensator iar în semiperioada următoare, condensatorul cedează putere pe la borne.

Prin urmare, în medie pe o perioadă, puterea instantanee este nulă. Deci puterea activă este nulă.

Această putere care oscilează de la borne către condensator şi invers, se numeşte putere reactivă capacitivă.

Se notează cu Q_C şi are expresia:

$$Q_C = \frac{U^2}{X_C} = X_C I^2 = -\frac{1}{\omega C} I^2 \quad . \qquad (5.137)$$

Unitatea de măsură este VAr (volt amper-reactiv).

Energia electrică. Expresia energiei electrice este

$$w_e = \frac{1}{2} C u^2 . \qquad (5.138)$$

Variaţia în timp este prezentată în fig. 5.74. Se constată ca şi în cazul bobinei electrice, că energia electrică este schimbată pe la borne de condensatorul ideal, fără să o consume.

Valoarea medie a energiei electrice acumulată între armăturile condensatorului electric ideal este

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2 . \qquad (5.139)$$

5.7.1. Puterea activă. Puterea reactivă. Puterea aparentă

In paragrafele anterioare, s-a determinat puterea în curent alternativ sinusoidal pentru următorii dipoli: rezistor, bobină şi condensator. Defazajele dintre tensiunea la bornele dipolului şi curentul prin dipol erau:

0 pentru rezistor;

$+\frac{\pi}{2}$ pentru bobină;

$-\frac{\pi}{2}$ pentru condensator.

Se consideră însă un circuit dipolar complex la care defazajul este φ. In acest caz tensiunea electrică la bornele circuitului dipolar este

$$u = U\sqrt{2} \sin \omega t$$

şi curentul electric

$$i = I\sqrt{2} \sin (\omega t - \varphi) .$$

Reprezentarea carteziană este redată în fig. 5.75 a şi b.

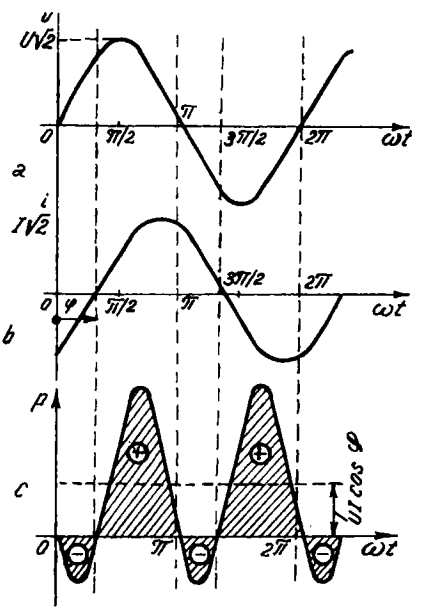


Fig. 5.75. Variaţia u, i şi p într-un circuit dipolar complex.

Puterea instantanee la bornele circuitul dipolar este

$$p = u\,i = 2\,UI \sin \omega t \sin (\omega t - \varphi) = UI \cos \varphi - UI \cos (2\omega t - \varphi) \quad (5.140)$$

Această dezvoltare s-a făcut în baza identității trigonometrice

$$2 \sin a \sin b = \cos (a - b) - \cos (a + b) .$$

Puterea activă este valoarea medie pe o perioadă a puterii instantanee.

Determinînd valoarea medie pentru expresia de mai sus, se obține:

$$P = U I \cos \varphi . \qquad (5.141)$$

Valoarea medie a termenului $U I \cos (2\omega t - \varphi)$ este egală cu zero pentru o perioadă.

Prin urmare, puterea activă a unui circuit dipolar este produsul dintre valorile efective ale tensiunii, curentului și cosinusul unghiului de defazaj dintre curent și tensiune. În fig. 5.75 c este reprezentată variația puterii instantanee a circuitului dipolar, în timp. Pe intervalul unei perioade, puterea instantanee are următoarele semnificații:

a. $0 \div \varphi$. Puterea instantanee marcată cu $\ominus$ este cedată pe la borne exterior.

b. $\varphi \div \pi$. Circuitul dipolar primește puterea din exterior. Este marcată cu $\oplus$.

c. $\pi \div \pi + \varphi$. Din nou, circuitul dipolar cedează putere către exterior pe la borne (semn $\ominus$).

d. $\pi + \varphi \div 2\pi$. Circuitul dipolar primește putere (vezi punctul b).

Se observă că într-o perioadă, energia primită de circuit - suprafețele cu $\oplus$ - este mai mare ca energia cedată exteriorului (suprafețele cu $\ominus$). Diferența lor pe o perioadă reprezintă energia disipată în elementele rezistive ale circuitului dipolar.

Acestei energii îi corespunde puterea activă.

Dacă circuitul dipolar este constituit dintr-un rezistor ideal, defazajul $\varphi = 0$, $U = R I$, astfel că puterea:

$$P_R = U I \cos 0^o = R I^2 \qquad (5.142)$$

este putere activă.

Cînd circuitul dipolar este constituit dintr-o bobină ideală, cu defazajul $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ sau dintr-un condensator ideal cu defazajul $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, puterea activă este nulă deoarece $\cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

In ambele cazuri, energia "pulsează" pe la bornele circuitului dipolar alternativ în ambele sensuri (suprafeţele cu semn ⊕ sînt egale cu suprafeţele cu semn ⊖).

Puterea reactivă. S-a arătat anterior că pentru elementele de circuit dipolare reactive (bobină respectiv condensator) puterea instantanee oscilează cu frecvenţă dublă faţă de tensiunea respectiv curentul circuitului (fig. 5.76).

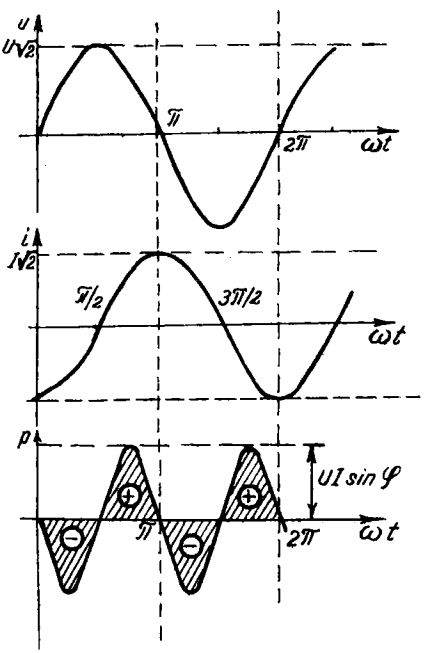


Fig. 5.76. Variaţia u, i şi p într-un dipol reactiv.

Puterea reactivă reprezintă valoarea maximă a puterii instantanee oscilante şi este

$$Q = U\ I\ \sin \varphi \qquad (5.143)$$

care poate să fie pozitivă sau negativă. Se notează cu Q şi se măsoară în VAr (volt amper-reactiv).

Puterea reactivă are următoarele valori pentru:

- rezistor ideal

$$Q_R = 0 \quad \text{pentru că } \sin \varphi = 0\ ; \qquad (5.144)$$

- bobină ideală

$$Q_L = U\ I \sin \frac{\pi}{2} = U\ I = X_L\ I^2 > 0\ ; \qquad (5.145)$$

- condensator ideal

$$Q_C = U\ I \sin (-\frac{\pi}{2}) = -\ U\ I = -X_C\ I^2 < 0\ . \qquad (5.146)$$

Se observă că puterea reactivă este pozitivă la bobine şi negativă pentru condensatoare.

Puterea aparentă a unui circuit dipolar reprezintă produsul dintre valorile efective ale tensiunii şi curentului.

Se notează cu S ;

$$S = U\ I\ . \qquad (5.147)$$

Unitatea de măsură pentru puterea aparentă este volt-amperul (VA).

Factor de putere reprezintă raportul dintre puterea activă şi puterea aparentă:

$$K_p = \frac{P}{S} = \cos \varphi\ . \qquad (5.148)$$

Cînd cos $\varphi = 1$, puterea activă este egală cu puterea aparentă.

In industrie, se urmăreşte ca o instalaţie electrică să lucreze cu maximum de putere activă, caz în care factorul de putere trebuie să fie aproape de unitate.

Intre puterile activă, reactivă şi aparentă există relaţia:

$$P^2 + Q^2 = S^2 \qquad (5.149)$$

dedusă din

$$(UI \cos \varphi)^2 + (UI \sin \varphi)^2 = (UI)^2.$$

Se pot scrie şi următoarele relaţii:

$$P = S \cos \varphi ; Q = S \sin \varphi \text{ şi } P \operatorname{tg} \varphi = Q . \qquad (5.150)$$

In baza acestor relaţii se poate construi triunghiul puterilor (fig.5.77).

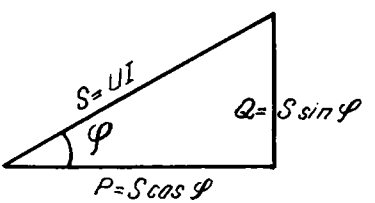


Fig. 5.77. Triunghiul puterilor.

Dacă se notează cu Z impedanţa circuitului electric, atunci între tensiunea la borne U şi curentul circuitului I, există relaţia:

$$U = Z I .$$

Tinînd seama de această relaţie, puterea aparentă se poate pune sub forma:

$$S = U I = Z I^2 . \qquad (5.151)$$

5.7.2. Reprezentarea puterilor în complex

Se consideră un circuit electric la bornele căruia se aplică tensiunea sinusoidală:

$$u = U\sqrt{2}\ \sin \omega t\ .$$

Circuitul electric este parcurs de curentul

$$i = I\sqrt{2}\ \sin\ (\omega t + \varphi),$$

cum se observă, defazat cu unghiul φ faţă de tensiune.

Aceste două mărimi electrice se reprezintă în complex astfel:

$$\underline{U} = U\ e^{j0^{o}} \quad \text{şi} \quad \underline{I} = I\ e^{-j\varphi}.$$

Se notează cu

$$\underline{I}^{*} = I\ e^{j\varphi} \qquad (5.152)$$

mărimea complexă conjugată a curentului $\underline{I}$.

Se efectuează produsul:

$$\underline{UI}^{*} = U\ I\ (\cos\varphi + j\ \sin\varphi) = U\ I\ \cos\varphi + j\ U\ I\ \sin\varphi,$$

Dar

$$U\ I\ \cos\varphi = P \quad \text{şi} \quad U\ I\ \sin\varphi = Q$$

Se constată de aici că produsul UI^{*} reprezintă puterea în complex, adică:

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^{*} = P + jQ\ . \qquad (5.153)$$

In baza acestei relaţii, se pot reprezenta în planul complex puterile: $\underline{S}$, P şi Q (fig. 5.78).

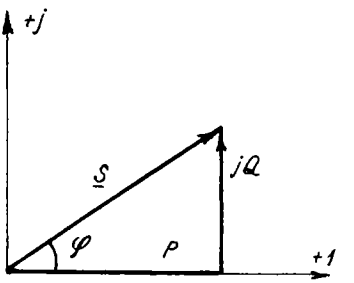


Fig. 5.78. Reprezentarea în planul complex a puterilor: $\underline{S}$, P şi Q.

In complex, se poate defini că:

Puterea aparentă S este modulul puterii aparente complexe $|\underline{S}|$,

$$S = |\underline{S}| . \qquad (5.154)$$

Puterea activă P este partea reală a puterii aparente complexe $\underline{S}$. Se scrie astfel:

$$P = \mathrm{Re}\left\{\underline{S}\right\} . \qquad (5.155)$$

Puterea reactivă Q este partea imaginară a puterii aparente complexe $\underline{S}$. Se scrie astfel:

$$Q = \mathrm{Im}\left\{\underline{S}\right\} . \qquad (5.156)$$

Aplicaţia 1

Pentru circuitul dipolar din fig. 5.79 compus din rezistorul electric de rezistenţă R = 6 Ω alimentat cu tensiunea electrică:

$$u = 120\sqrt{2}\ \sin 100\pi t \quad (V) ;$$

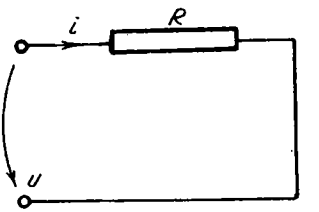


Fig. 5.79.

Se cere:

a. intensitatea curentului electric;

b. puterea aparentă;

c. puterea activă;

d. puterea reactivă.

Se vor efectua calculele cu metoda complexă.

Tensiunea electrică complexă este

$$\underline{U} = U\, e^{j\beta} = 120\, e^{j0^{o}} = 120 \quad (V)$$

Impedanţa $\underline{Z}$ este

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_c) = 6 + j \cdot 0 = 6\Omega .$$

a. Curentul electric

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{120}{6} = 20 \text{ A} .$$

Curentul electric instantaneu este

$$i = I\sqrt{2} \sin 100\pi t = 20\sqrt{2} \sin 100\pi t \qquad (A) .$$

b) Puterea aparentă complexă este

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^{*} = 120 \cdot 6 = 720 .$$

Puterea aparentă:

$$S = |\underline{S}| = 720 \text{ VA} .$$

c) Puterea activă:

$$P = \mathrm{Re}\left\{\underline{S}\right\} = \mathrm{Re}\left\{720\right\} = 720 \text{ W} .$$

d) Puterea reactivă:

$$Q = I_m\left\{\underline{S}\right\} = I_m\left\{720\right\} = 0 \quad \text{VAr} .$$

Aplicaţia 2

Pentru circuitul dipolar din fig. 5.80 compus din bobina electrică ideală cu inductivitatea L = 76 mH alimentat cu tensiunea electrică:

$$u = 120\sqrt{2}\ \sin\ 100\pi t \quad (\text{V}) .$$

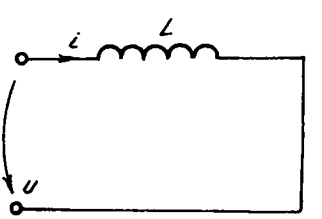


Fig. 5.80.

Se cere:

a. reactanţa inductivă;

b. intensitatea curentului electric;

c. puterea aparentă;

d. puterea activă;

e. puterea reactivă.

Se vor efectua calculele cu metoda complexă.

Tensiunea electrică complexă este

$$\underline{U} = U\, e^{j\beta} = 120\, e^{j0^{o}} = 120 \quad (V).$$

a. Reactanţa inductivă este

$$X_L = 2\pi f L = 100\pi \cdot 0{,}076 = 24\,\Omega .$$

Impedanţa

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = 0 + j(24 - 0) = 24\, j .$$

b. Intensitatea curentului electric:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{120}{24\, j} = -5\, j .$$

Sub formă exponenţială, curentul este

$$\underline{I} = 5\, e^{-j\frac{\pi}{2}} .$$

Curentul electric instantaneu este

$$i = 5\sqrt{2}\ \sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (A) .$$

c. Puterea aparentă complexă este

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^{*} = 120 \cdot 5\, e^{j\frac{\pi}{2}} = 600\, e^{j\frac{\pi}{2}} = 600\ j\ .$$

Puterea aparentă:

$$S = |\underline{S}| = \left| 600\, e^{j\frac{\pi}{2}} \right| = 600\ VA\ .$$

d. Puterea activă:

$$P = Re\left\{\underline{S}\right\} = Re\left\{600\ j\right\} = 0\ W\ .$$

e. Puterea reactivă:

$$Q = I_m\left\{\underline{S}\right\} = I_m\left\{600\ j\right\} = 600\ VAr\ .$$

Aplicaţia 3

Pentru circuitul dipolar din fig. 5.81 compus din condensatorul electric ideal cu capacitatea C = 265 μF alimentat cu tensiunea electrică:

$$u = 120\sqrt{2}\ \sin 100\pi t\ \ (V)\ ,$$

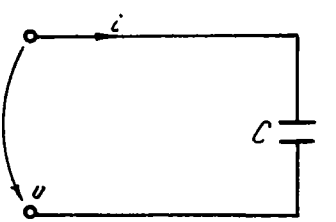


Fig. 5.81.

Se cere:

a. reactanţa capacitivă;

b. intensitatea curentului electric;

c. puterea aparentă;

d. puterea activă;

e. puterea reactivă.

Se vor efectua calculele cu metoda complexă.

Tensiunea electrică complexă este

$$\underline{U} = 120\, e^{j0^{\circ}} = 120\ V .$$

a. Reactanţa capacitivă este

$$X_c = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{100\pi \cdot 265 \cdot 10^{-6}} = 12\,\Omega .$$

Impedanţa complexă este

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_c) = 0 + j(0 - 12) = -12\ j .$$

b. Intensitatea curentului electric:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{120}{-12\ j} = 10\ j .$$

Sub formă exponenţială:

$$\underline{I} = 10\, e^{j\frac{\pi}{2}} .$$

Valoarea instantanee a curentului electric este

$$i = 10\sqrt{2}\ \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (A) .$$

c. Puterea aparentă complexă este

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^{*} = 120 \cdot 10\, e^{-j\frac{\pi}{2}} = 1200\, e^{-j\frac{\pi}{2}} = -1200\, j\,.$$

Puterea aparentă:

$$S = |\underline{S}| = |-1200\, j| = 1200 \text{ VA}\,.$$

d. Puterea activă:

$$P = \mathrm{Re}\left\{\underline{S}\right\} = \mathrm{Re}\left\{-1200\, j\right\} = 0 \text{ W}\,.$$

e. Puterea reactivă:

$$Q = I_m\left\{\underline{S}\right\} = I_m\left\{-1200\, j\right\} = -1200 \text{ VAr}\,.$$

Aplicaţia 4

Pentru circuitul dipolar din fig. 5.82 compus din rezistorul ideal cu rezistenţa $R = 6\,\Omega$, bobina ideală cu inductivitatea $L = 57$ mH şi condensatorul ideal cu capacitatea $C = 265\,\mu$F, alimentat cu tensiunea electrică:

$$u = 120\sqrt{2}\sin 100\pi t \quad (V)\,.$$

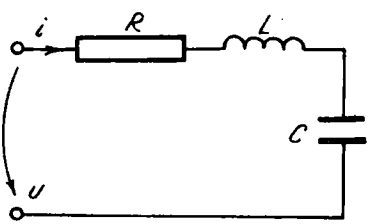


Fig. 5.82.

Se cere:

a. impedanţa dipolului ($X_L = 18\,\Omega$; $X_C = 12\,\Omega$);

b. intensitatea curentului electric;

c. puterea aparentă;

d. puterea activă;

e. puterea reactivă.

Se vor efectua calculele cu metoda complexă.

Tensiunea electrică complexă este:

$$\underline{U} = 120\ e^{j0^{o}} = 120\ .$$

a. Impedanţa complexă:

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = 6 + j(18 - 12) = 6 + 6\ j\ .$$

Sub formă exponenţială

$$\underline{Z} = \sqrt{72}\ .\ e^{j\frac{\pi}{4}}\ .$$

Impedanţa

$$Z = \sqrt{72} = 8,6\ \Omega\ .$$

b. Intensitatea curentului electric:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{120}{6 + 6\ j} = 10\ (1 - j) = \sqrt{200}\ \ e^{-j\frac{\pi}{4}}\ .$$

Valoarea instantanee a curentului electric este

$$i = \sqrt{200}\ .\sqrt{2}\ \ \sin\ (100\pi t - \frac{\pi}{4}) = 20\ \sin\ (100\pi t - \frac{\pi}{4})\quad (A)\ .$$

c. Puterea aparentă complexă:

$$\underline{S} = \underline{U}\ \underline{I}^{*} = 120\ .\sqrt{200}\ e^{j\frac{\pi}{4}} = 120\ .\sqrt{200}\ (\cos\frac{\pi}{4} + j\ \sin\frac{\pi}{4})$$

sau

$$\underline{S} = 1200\sqrt{2}\ (\frac{\sqrt{2}}{2} + j\ (\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1200\ (1 + j)\ .$$

Puterea aparentă este

$$S = |\underline{S}| = 1200 \cdot \sqrt{2} \text{ VA} .$$

d. Puterea activă:

$$P = \text{Re}\left\{\underline{S}\right\} = \text{Re}\left\{1200\ (1 + j)\right\} = 1200 \text{ W} .$$

e. Puterea reactivă:

$$Q = I_m\left\{\underline{S}\right\} = I_m\left\{1200\ (1 + j)\right\} = 1200 \text{ VAr} .$$

Circuitul are caracter inductiv ($Q > 0$).

Se verifică:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1200\sqrt{2} \text{ VA} .$$

f. Factorul de putere:

$$K_p = \cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{1.200}{1.200\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.71 .$$

5.7.3. Transferul maxim de putere activă

S-a arătat că un generator real de curent continuu cu rezistenţă internă R_i transferă o putere maximă receptorului de rezistenţă R_s, atunci cînd rezistenţele sînt egale:

$$R_s = R_i .$$

Se vor determina condiţiile în care un generator real de curent alternativ sinusoidal transferă putere activă maximă către receptorul legat la bornele sale.

Se consideră (fig. 5.83) un generator de curent alternativ de tensiune electromotoare

$$e = E\sqrt{2}\ \sin\omega t$$

şi impedanţă

$$\underline{Z} = Rg + j\,Xg\,.$$

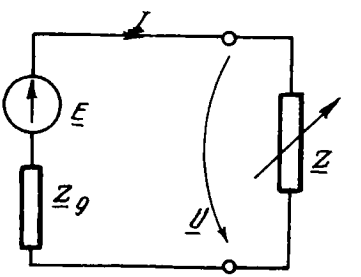


Fig. 5.83. Generator real de curent alternativ alimentează receptorul $\underline{Z}$.

Acesta alimentează receptorul de impedanţă variabilă:

$$\underline{Z} = R + j\,X\,,$$

Curentul absorbit de receptor pe la borne are valoarea efectivă:

$$I = \frac{E}{\sqrt{(R_g + R)^2 + (X_g + X)^2}}\,.$$

Puterea activă primită pe la borne este

$$P = RI^2 = \frac{R}{(Rg + R)^2 + (Xg + X)^2}\,E^2\,.$$

Se presupune rezistenţa receptorului R = constanta. In acest caz, puterea activă P este maximă cînd termenul

$$Xg + X = 0$$

sau

$$X = - Xg .$$

In continuare se presupune X = - Xg şi trebuie determinată puterea maximă din expresia:

$$P = \frac{R}{(Rg + R)^2} E^2 .$$

Se demonstrează că această expresie este maximă pentru

$$R = Rg .$$

Prin urmare condiţiile sînt

$$R = Rg \quad şi \quad X = - Xg .$$

Scrisă în complex:

$$R + j X = Rg - j Xg$$

sau

$$\underline{Z} = \underline{Zg}^{*} . \qquad (5.157)$$

Relaţia (5.17) se numeşte condiţia de adaptare a sarcinii la generator pentru a obţine transfer maxim de putere activă.

Rezultă în continuare următoarele:

- Valoarea efectivă a curentului prin receptor:

$$I = \frac{E}{2\ R}$$

- Puterea activă maximă transferată:

$$P = \frac{E^2}{4\ Rg}$$

- Randamentul transferului de putere:

$$\eta = \frac{P}{Pg} = \frac{R\ I^2}{E\ I} = \frac{R\ I^2}{2\ R\ I^2} = 0,5 \quad \text{sau } \eta = 50\%$$

Cînd transferul de putere activă este maxim, randamentul este redus, egal cu 50%.

Din această cauză, condiţia de adaptare a sarcinii la generator se foloseşte în telecomunicaţii, unde se urmăreşte un transfer maxim de putere activă de la generator la receptor. In generatoarele de curent alternativ folosite în electroenergetică se urmăreşte realizarea unui randament maxim; aceasta se realizează cînd rezistenţa generatorului Rg tinde către zero.

5.7.4. Teorema conservării puterilor complexe în circuite de curent alternativ sinusoidal

Intr-un circuit de curent alternativ sinusoidal puterea aparentă complexă furnizată de generatoarele circuitului este egală cu puterea aparentă complexă consumată de receptoarele circuitului respectiv:

$$\sum_{k=1}^{L} E_k\ I_k^* = \sum_{k=1}^{L} \left(R_k + j\omega L_k + \frac{1}{j\ \omega\ Ck}\right) I_k^2 \qquad (5.158)$$

sau prescurtat

$$\underline{Sg} = \underline{S} \, .$$

Acest enunţ reprezintă teorema conservării puterii aparente complexe într-un circuit de curent alternativ sinusoidal. Teorema se foloseşte la verificarea rezultatelor obţinute în urma rezolvării unui circuit de curent sinusoidal. Se spune în acest caz că s-a efectuat bilanţul puterii aparente complexe.

Termenii din membrul stîng se scriu cu semnul plus sau minus, conform regulei prezentate în fig. 5.84.

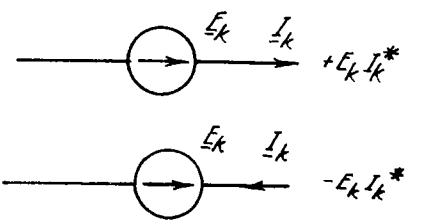


Fig. 5.84. Regulă pentru scrierea semnelor puterii complexe.

Termenii din membrul drept se scriu cu semnul plus.

Termenul

$$\frac{1}{j\omega Ck} I_k^2$$

poate apare şi cu semnul minus deoarece

$$\frac{1}{j\omega Ck} I_k^2 = - \frac{j}{Ck} I_k^2 \, .$$

Bilanţul puterii active în circuit se obţine din relaţia (5.158) egalînd părţile reale:

$$\mathrm{Re}\left\{\sum_{k=1}^{L}\underline{E}_k\,\underline{I}_k^{*}\right\}=\sum_{k=1}^{L}R_k\,I_k^2\,. \qquad (5.159)$$

Bilanţul puterii reactive în circuit se obţine din aceeaşi relaţie (5.158) egalînd părţile imaginare:

$$I_m\left\{\sum_{k=1}^{L}\underline{E}_k\,\underline{I}_k^{*}\right\}=\sum_{k=1}^{L}\left(\omega L_k-\frac{1}{\omega C_k}\right)I_k^2 \qquad (5.160)$$

5.8. Metode de rezolvare a circuitelor electrice liniare de curent alternativ sinusoidal

In vederea rezolvării circuitelor electrice de curent sinusoidal, mărimile electrice vor fi reprezentate în complex. Calculele efectuate asupra mărimilor electrice reprezentate în complex se limitează la rezolvarea de ecuaţii algebrice liniare în care apar mărimi complexe.

Cele mai răspîndite probleme care se cer a fi rezolvate sînt acelea în care trebuie să se determine curenţii cînd sînt cunoscute impedanţele şi tensiunile electromotoare ale generatoarelor de tensiune alternativă.

Circuitele electrice prezentate în continuare nu vor conţine generatoare de curent alternativ.

Metodele de rezolvare a circuitelor de curent alternativ sinusoidal sînt:

- metoda lui Ohm;
- metoda impedanţelor echivalente;
- metoda teoremelor Kirchhoff;
- metoda superpoziţiei;
- metoda curenţilor ciclici;
- metoda potenţialelor la noduri;
- metoda generatoarelor echivalente de tensiune şi curent.

Pentru verificarea rezultatelor obţinute în urma rezolvării circuitului electric alternativ se efectuează bilanţul puterilor active, reactive şi aparente prezentat în paragraful anterior.

Elementele topologice definite la circuitele de curent continuu se păstrează şi în circuitele de curent alternativ sinusoidal necuplate magnetic (nod, latură, ochi, sistem de ochiuri fundamentale).

5.8.1. Metoda legii lui Ohm.

Intr-un circuit RLC serie (fig. 5.85) în care tensiunea generatorului ideal de tensiune este:

$$e = E\sqrt{2}\ \sin \omega t .$$

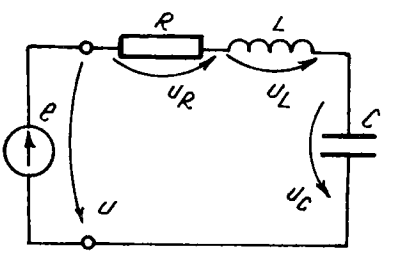


Fig. 5.85. Circuit RLC serie pentru aplicarea legii lui Ohm.

Se scrie

$$e = u_R + u_L + u_C .$$

Scrisă în complex se obţine

$$\underline{E} = R\,\underline{I} + j\omega L\,\underline{I} + \frac{1}{j\omega C}\,\underline{I}$$

sau

$$\underline{E} = \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]\underline{I} ;$$

$$\underline{E} = (R + j\,X)\,\underline{I} = \underline{Z}\,\underline{I} \ .$$

Expresia:

$$\underline{E} = \underline{Z}\,\underline{I} \qquad (5.161)$$

şi

$$\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I} \quad \text{pentru} \quad \underline{E} = \underline{U}$$

se numeşte legea lui Ohm în formă complexă.

Mărimile:

$$\underline{Z} = R + j\,X$$

impedanţa complexă şi reactanţele

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

s-au definit anterior.

Metoda legii lui Ohm se aplică în cazul circuitelor serie alimentate la o singură sursă de tensiune electromotoare.

Prin problemă se cunosc elementele de circuit R, L, C şi tensiunea electromotoare:

$$e = E\sqrt{2}\ \sin(\omega t + \alpha) \ .$$

Din expresia tensiunii electromotoare e se obţine direct valoarea efectivă a t.e.m. E, pulsaţia ω şi se poate determina t.e.m. complexă $\underline{E} = E\,e^{j\alpha}$.

Tensiunea electromotoare $\underline{E}$ constituie faza de referinţă în reprezentarea fazorială.

Curentul debitat de sursă, rezultă din legea lui Ohm

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{E}}{R + j\,X} = \frac{\underline{E}}{R + j(X_L - X_C)}$$

în care:

R este rezistenţa legată în serie;

$X_L = \omega L$ - reactanţa inductivă;

$X_C = \frac{1}{\omega C}$ - reactanţa capacitivă.

Căderile de tensiune pe elementele din circuit se determină din:

$$\underline{U}_R = R\,\underline{I}\,;\ \underline{U}_L = j\,X_L\,\underline{I} \quad \text{şi} \quad \underline{U}_C = -\,j\,X_C\,\underline{I}\,.$$

Defazajul se calculează cu expresia:

$$\varphi = \text{arc tg}\,\frac{X}{R}\,.$$

Expresia instantanee a curentului este

$$i = \sqrt{2}\ I \sin(\omega t + \alpha - \varphi)\,.$$

Puterea activă reactivă şi aparentă se deduce din expresia

$$\underline{S} = P + j\,Q = \underline{E}\,\underline{I}^{*}\,.$$

In final, se trasează în planul complex fazorii tensiunea, curentul şi defazajul.

5.8.2. Metoda impedanţelor echivalente

Metoda se foloseşte în cazul circuitelor electrice derivate, alimentate de o singură sursă de tensiune. Impedanţele legate în paralel se echivalează cu impedanţe legate în serie. Acestora se aplică metoda legii lui Ohm.

Legarea în serie a impedanţelor (fig. 5.86).

Se scrie că tensiunea la borne este egală cu suma căderilor de tensiune pe impedanţe.

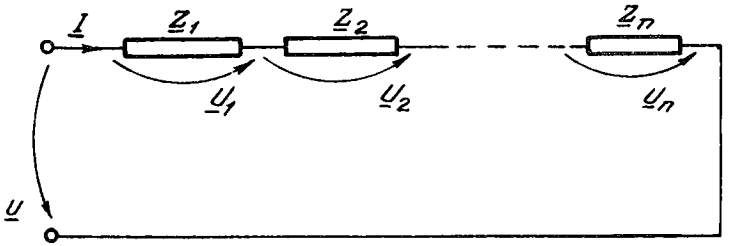


Fig. 5.86. Legarea în serie a impedanţelor.

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \ldots\ldots + \underline{U}_n .$$

Impedanţa echivalentă este:

$$\underline{Z}_s = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \ldots + \underline{U}_n}{\underline{I}} = \frac{\underline{Z}_1\underline{I} + \underline{Z}_2\underline{I} + \ldots + \underline{Z}_n\underline{I}}{\underline{I}}$$

sau

$$\underline{Z}_s = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \ldots\ldots + \underline{Z}_n . \qquad (5.162)$$

Legarea în paralel a impedanţelor (fig. 5.87).

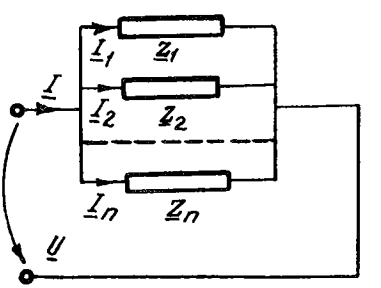


Fig. 5.87. Legarea în paralel a impedanţelor.

Curentul complex $\underline{I}$ se determină din:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \ldots + \underline{I}_n .$$

Dar:

$$\underline{U} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 = \ldots = \underline{Z}_n \underline{I}_n$$

iar impedanţa echivalentă este

$$\frac{1}{\underline{Z}_p} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}} + \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}} + \ldots + \frac{\underline{I}_n}{\underline{U}}$$

sau

$$\frac{1}{\underline{Z}_p} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{\underline{Z}_n} . \qquad (5.163)$$

In cazul în care n = 2 rezultă

$$\underline{Z}_p = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} . \qquad (5.164)$$

Aplicaţie

Să se rezolve circuitul electric din fig. 5.88 în care:

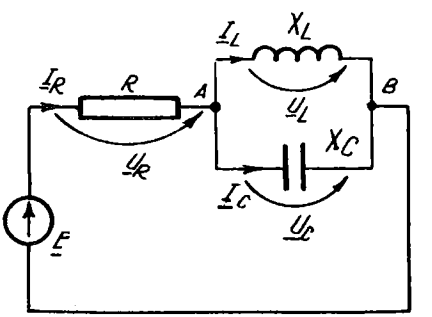


Fig. 5.88.

$\underline{E} = E = 250$ V

$R = 40\,\Omega$

$X_L = \omega L = 15\,\Omega$

$X_C = \frac{1}{\omega C} = 10\,\Omega$

Impedanţa echivalentă a grupului LC rezultă:

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{jX_L\,(-\,jX_c)}{j\,(X_L - X_c)} = \frac{j \cdot 15\,(-\,j\ \ 10)}{j\,(15 - 10)} = -\,30\,j\,.$$

Impedanţa circuitului este

$$\underline{Z} = R + \underline{Z}_{AB} = 40 - 30\,j$$

iar

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50\,\Omega\,.$$

Curentul debitat de sursă:

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{250}{40 - 30\,j} = 4 + 3\,j\,.$$

Defazajul:

$$\varphi = \text{arc tg}\,\frac{X}{R} = \text{arc tg}\,\frac{-30}{40} = -\,36^{\circ}53'.$$

Curentul prin rezistor:

$$\underline{I}_R = \underline{I}\,.$$

Expresia instantanee a curentului debitat:

$$i = i_R = 5\sqrt{2} \sin \left[\omega t - (- 36^{o}53') \right]$$

sau

$$i = i_R = 5\sqrt{2} \sin (\omega t + 36^{o}53') .$$

Căderea de tensiune pe rezistenţă:

$$\underline{U}_R = R \underline{I} = 40 (4 + j 3) \quad \text{şi} \quad U_R = 200 \text{ V} .$$

Căderile de tensiune pe elementele de circuit L şi C.

$$\underline{U}_L = \underline{U}_C = \underline{U}_{AB} = \underline{Z}_{AB} \underline{I} = - 30 j (4+3 j) = 30 (3-4 j)$$

sau

$$U_{AB} = U_L = U_C = 150 \text{ V} .$$

Curenţii prin bobină :

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{U}_{AB}}{j X_L} = \frac{30 (3 - 4 j)}{15 j} = - 2 (4 + 3 j) .$$

Curentul prin condensator:

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{AB}}{-j X_C} = \frac{30 (3 - 4 j)}{- 10 j} = 3 (4 + 3 j) .$$

Verificare:

$$\underline{I}_L + \underline{I}_C = \underline{I} = 4 + 3 j .$$

Puterea aparentă este

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^{*} = 250\ (4 - 3\ j);$$

$$\underline{S} = 1\ 000 - 750\ j\ .$$

Puterea activă:

$$P = 1\ 000\ W\ .$$

Puterea reactivă:

$$Q = -\ 750\ VAr$$

Puterea aparentă:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1\ 250\ VA\ .$$

Circuitul este capacitiv ($Q < 0$).

In fig. 5.89 este reprezentată diagrama fazorială.

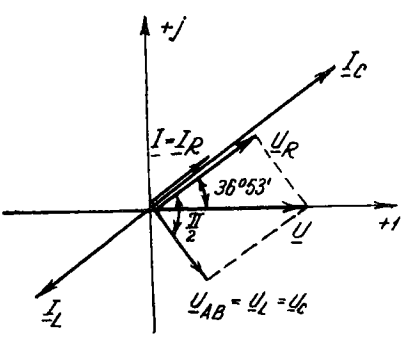


Fig. 5.89.

5.8.3. Metoda teoremelor lui Kirchhoff

Teoremele lui Kirchhoff cunoscute de la regimul de curent continuu se aplică şi la circuitele de curent alternativ sinusoidal.

Se vor prezenta ambele teoreme transpuse în complex.

Teorema întîi a lui Kirchhoff aplicată nodului a se exprimă astfel: Suma algebrică a curenţilor sinusoidali reprezentaţi în complex care circulă prin laturile legate într-un nod de circuit este egală cu zero.

$$\sum_{k \in a} \underline{I}_k = 0 , \qquad (5.165)$$

Se scriu cu plus curenţii complecşi care ies din nod şi cu minus, curenţii complecşi care intră în nod.

Exemplu: Pentru nodul din fig. 5.90 se scrie

$$-\underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{I}_3 - \underline{I}_4 - \underline{I}_5 = 0 .$$

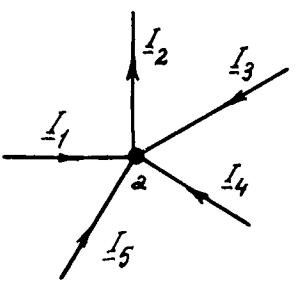


Fig. 5.90.

Teorema a doua a lui Kirchhoff pentru circuite electrice de curent alternativ sinusoidal fără cuplaje magnetice se enunţă astfel: suma algebrică

a căderilor de tensiune complexă pe elementele pasive din laturile unui ochi de circuit electric este egală cu suma algebrică a tensiunilor electromotoare complexe din laturile ochiului considerat.

$$\sum_{k \in p} \left[\left(R_k + j\omega L_k + \frac{1}{j\omega C_k} \right) \underline{I}_k \right] = \sum_{k \in p} \underline{E}_k$$

sau

$$\sum_{k \in p} \underline{Z}_k \underline{I}_k = \sum_{k \in p} \underline{E}_k \qquad (5.166)$$

în care:

$R_k \underline{I}_k$ reprezintă căderea de tensiunea complexă la bornele rezistorului din latura k;

$j\omega L_k \underline{I}_k$ reprezintă căderea de tensiune complexă inductivă la bornele bobinei din latura k;

$\frac{1}{j\omega C_k} = -\frac{j}{\omega C_k}$ reprezintă căderea de tensiune complexă capacitivă la bornele condensatorului din latura k;

$\underline{E}_k$ reprezintă tensiunea electromotoare complexă a sursei ideale din latura k.

Semnele termenilor se adoptă în raport cu sensul de referinţă al ochiului şi curenţilor din laturi. Ca exemplu, se va scrie pentru ochiul din fig. 5.91 teorema a doua a lui Kirchhoff:

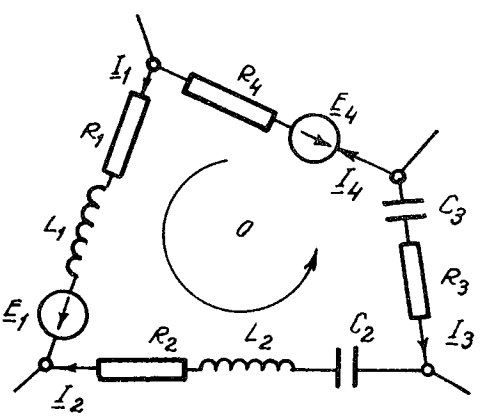


Fig. 5.91.

$$(R_1 + j\omega L_1)\,\underline{I}_1 - (R_2 + j\omega L_2 - \frac{j}{\omega C_2})\,\underline{I}_2 - (R_3 - \frac{j}{\omega C_3})\,\underline{I}_3 + R_4\,\underline{I}_4 =$$

$$= \underline{E}_1 - \underline{E}_4 .$$

Ca şi în curent continuu, teorema întîi a lui Kirchhoff se aplică de (N-1) ori iar teorema a doua de o ori, în care N reprezintă numărul de noduri din circuitul electric respectiv iar o reprezintă numărul de ochiuri fundamentale din acelaşi circuit. Se scriu L ecuaţii în care conform teoremei lui Euler, numărul de laturi satisface relaţia:

$$L = N - 1 + o . \qquad (5.167)$$

Metoda se foloseşte la circuitele ramificate cu una sau mai multe surse de tensiune şi se aplică astfel:

a. Se determină numărul de noduri, numărul de laturi şi numărul de ochiuri fundamentale.

b. Se aleg sensuri de referinţă arbitrare pentru curenţii din laturi.

c. Se aleg sensuri de referinţă arbitrare pentru ochiurile fundamentale.

d. Se scriu N-1 ecuaţii cu teorema întîi a lui Kirchhoff şi o = L-N+1 ecuaţii cu teorema a doua.

e. Se verifică rezultatele cu bilanţul puterilor.

f. Se trasează diagrama fazorială în planul complex.

Aplicaţie

Să se rezolve circuitul electric din fig. 5.92 prin metoda teoremelor lui Kirchhoff.

Date:

$R_1 = 2\,\Omega$; $R_2 = 1\,\Omega$; $R_3 = 1\,\Omega$; $\omega L_1 = 4\,\Omega$; $\frac{1}{\omega C_2} = 4\,\Omega$; $\frac{1}{\omega C_3} = 3\,\Omega$;

$e_1 = 10 \sin (\omega t + \frac{3\pi}{4})$ (V); $\underline{E}_1 = 5\,(-1 + j)$; $e_2 = 12 \sin (\omega t - \frac{\pi}{4})$ (V); $\underline{E}_2 =$

$= +6\,(1 - j)$.

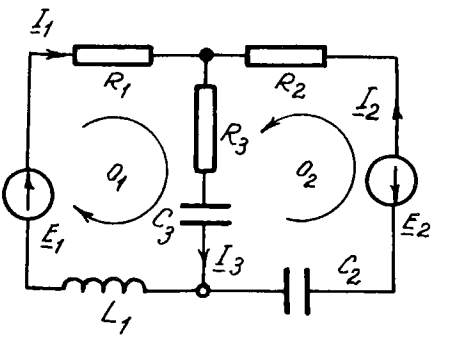


Fig. 5.92.

Rezultatele se vor verifica cu bilanţul puterilor şi se va trasa diagrama fazorială.

Cu sensurile curenţilor şi ochiurilor arbitrar alese în fig. 5.92 se scrie:

$$N - 1 = 2 - 1 = 1$$

ecuaţie cu teorema întîi a lui Kirchhoff şi

$$o = L - N + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$$

ecuaţii cu teorema a doua a lui Kirchhoff.

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0$$

$$(R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 + (R_3 - \frac{j}{\omega C_3})\underline{I}_3 = \underline{E}_1$$

$$(R_2 - \frac{j}{\omega C_2})\underline{I}_2 + (R_3 - \frac{j}{\omega C_3})\underline{I}_3 = -\underline{E}_2$$

Sau prin înlocuire:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0$$

$$(2 + 4\,j)\,\underline{I}_1 + (1 - 3\,j)\,\underline{I}_3 = 5\,(-1 + j)$$

$$(1 - 4\,j)\,\underline{I}_2 + (1 - 3\,j)\,\underline{I}_3 = -6\,(1 - j)$$

Soluţiile sistemului de ecuaţii sînt:

$$\underline{I}_1 = j = e^{j\frac{\pi}{2}} \quad \text{şi} \quad i_1 = \sqrt{2}\,\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (A)$$

$$\underline{I}_2 = -1 - j = \sqrt{2}\,e^{-j\frac{3\pi}{4}} \quad \text{şi} \quad i_2 = 2\,\sin\left(\omega t - \frac{3\pi}{4}\right) \quad (A)$$

$$\underline{I}_3 = -1 = e^{j\pi} \quad \text{şi} \quad i_3 = \sqrt{2}\,\sin(\omega t + \pi) \quad (A)$$

Bilanţul puterilor.

Puterile generate.

Puterea aparentă complexă

$$\underline{Sg} = \underline{E}_1\,\underline{I}_1^* - \underline{E}_2\,\underline{I}_2^* = 5(-1+j)(-j) - 6(1-j)(-1+j) = 5-7\,j$$

Puterea activă generată este

$$Pg = \mathrm{Re}\left\{\underline{Sg}\right\} = 5\ \mathrm{W}\ .$$

Puterea reactivă generată este

$$Q_g = I_m\left\{\underline{Sg}\right\} = -7\ \mathrm{VAr}\ .$$

Puterea aparentă generată:

$$S = \sqrt{Pg^2 + Qg^2} = \sqrt{5^2 + (-7)^2} = 8,61 \text{ VA} .$$

Puterile consumate.

Puterea activă consumată

$$P_c = \sum_{k=1}^{3} R_k I_k^2 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 = 2.1^2 + 1(\sqrt{2})^2 + 1.1^2 = 5 \text{ W}$$

egală cu puterea activă generată.

Puterea reactivă consumată

$$Q_c = \sum_{k=1}^{3} (\omega L_k - \frac{1}{\omega C_k}) I_k^2 = \omega L_1 I_1^2 - \frac{1}{\omega C_2} I_2^2 - \frac{1}{\omega C_3} I_3^2 = 4.1^2 - 3.1^2 -$$

$$- 4 (\sqrt{2})^2 = - 7 \text{ VAr}$$

Puterea aparentă consumată

$$S_c = \sqrt{P_c^2 + Q_c^2} = \sqrt{5^2 + (-7)^2} = 8.61 \quad \text{VA}$$

Diagrama fazorială este prezentată în fig. 5.93.

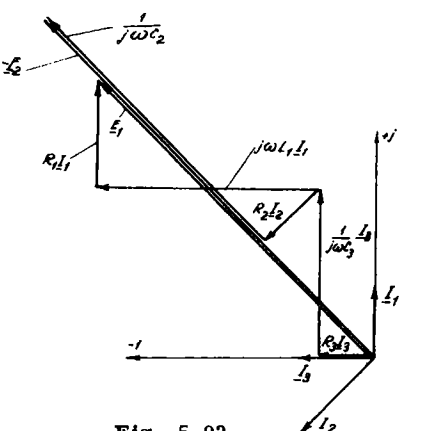


Fig. 5.93.

5.8.4. Metoda superpoziţiei

Ca şi în curent continuu, metoda are la bază superpoziţia efectelor. Potrivit acestei superpoziţii, curentul electric dintr-o latură a unui circuit de curent alternativ sinusoidal reprezintă suma algebrică a curenţilor produşi de fiecare sursă de t.e.m. din circuit dacă ar acţiona singură în reţea.

Se reaminteşte că se procedează astfel: se menţine succesiv în circuit numai o sursă, celelalte surse fiind pasivizate (t.e.m. este nulă dar impedanţa sursei neschimbată).

5.8.5. Metoda curenţilor ciclici

Rezolvarea circuitelor electrice liniare de curent alternativ se poate face mai simplu prin această metodă decît cu metoda teoremelor lui Kirchhoff. De ce? Pentru că numărul ecuaţiilor de rezolvat în acest caz este egal cu numărul ochiurilor fundamentale o mai mic ca numărul laturilor L (cazul teoremelor lui Kirchhoff).

Necunoscutele sînt curenţii ciclici complecşi asociaţi ochiurilor fundamentale şi a căror superpoziţie dintr-o latură determină curentul total din latura respectivă.

Sistemul de ecuaţii scris pentru un circuit compus din două ochiuri este următorul:

$$\underline{Z}'_{11}\,\underline{I}'_1 + \underline{Z}'_{12}\,\underline{I}'_2 = \underline{E}'_1 \qquad (5.168)$$

$$\underline{Z}'_{21}\,\underline{I}'_1 + \underline{Z}'_{22}\,\underline{I}'_2 = \underline{E}'_2$$

în care termenii au următoarele semnificaţii:

$\underline{I}'_1$ şi $\underline{I}'_2$ curenţii ciclici din ochiurile 1 şi 2;

$\underline{Z}'_{11}$ respectiv $\underline{Z}'_{22}$ reprezintă impedanţele proprii ale ochiului 1 şi ochiului 2; Se calculează ca sumă aritmetică a impedanţelor proprii ale elementelor din laturile ochiurilor respective;

$\underline{Z}'_{12} = \underline{Z}'_{21}$ reprezintă impedanţa din laturile comune ochiurilor 1 şi 2; Se calculează ca sumă algebrică după regula următoare: se adoptă semnul plus cînd curenţii ciclici $\underline{I}'_1$ şi $\underline{I}'_2$ au acelaşi sens prin impedanţa respectivă şi semnul minus în caz contrar;

$\underline{E}'_1$ şi $\underline{E}'_2$ reprezintă suma algebrică a tensiunilor electromotoare din laturile ochiului 1 respectiv din laturile ochiului 2; Se adoptă semnul plus pentru tensiunile electromotoare complexe care au acelaşi sens cu sensul curentului ciclic şi semnul minus în caz contrar.

Pentru utilizarea corectă a metodei se procedează astfel:

a. Se aleg ochiurile fundamentale şi sensul curentului ciclic prin fiecare ochi fundamental;

b. Se scriu ecuaţiile sistemului curenţilor ciclici;

c. Se rezolvă sistemul de ecuaţii obţinînd curenţii ciclici;

d. Se determină curenţii complecşi din laturi prin superpoziţia curenţilor ciclici;

e. Se verifică rezultatele cu bilanţul puterilor.

Aplicaţie

Să se rezolve circuitul electric din fig. 5.94 prin metoda curenţilor ciclici.

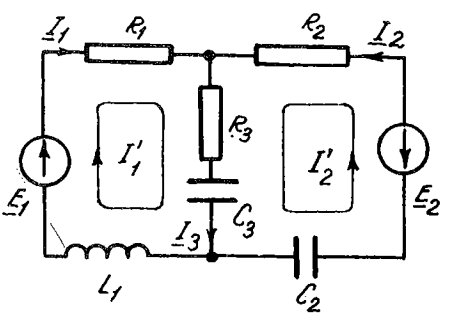


Fig. 5.94.

Date:

$R_1 = 2\,\Omega$; $R_2 = 1\,\Omega$; $R_3 = 1\,\Omega$; $\omega L_1 = 4\,\Omega$; $\frac{1}{\omega C_2} = 4\,\Omega$; $\frac{1}{\omega C_3} = 3\Omega$;

$e_1 = 10 \sin (\omega t + \frac{3\pi}{4})$ (V ; $\underline{E}_1 = 5(-1+j)$; $e_2 = 12 \sin (\omega t - \frac{\pi}{4})$; $\underline{E}_2 = 6(1-j)$.

a. In fig. 5.94 s-au ales sensurile curenţilor ciclici şi ochiurile fundamentale.

b. Ecuaţiile sistemului curenţilor ciclici sînt:

$$\underline{Z}'_{11}\,\underline{I}'_1 + \underline{Z}'_{12}\,\underline{I}'_2 = \underline{E}'_1$$

$$\underline{Z}'_{21}\,\underline{I}'_1 + \underline{Z}_{22}\,\underline{I}'_2 = \underline{E}'_2$$

în care:

$$\underline{Z}'_{11} = R_1 + R_3 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_3} = 3 + j$$

$$\underline{Z}'_{22} = R_2 + R_3 + \frac{1}{j\omega C_2} + \frac{1}{j\omega C_3} = 2 - 7\,j$$

$$\underline{Z}'_{12} = \underline{Z}'_{21} = R_3 + \frac{1}{j\omega C_3} = 1 - 3\,j$$

Pentru că în latura comună curenţii ciclici $\underline{I}'_1$ şi $\underline{I}'_2$ au acelaşi sens, impedanţele $\underline{Z}'_{12} = \underline{Z}'_{21}$ se scriu cu plus:

$$(3 + j)\,\underline{I}'_1 + (1 - 3\,j)\,\underline{I}'_2 = 5\,(-1 + j)$$

$$(1 - 3\,j)\,\underline{I}'_1 + (2 - 7\,j)\,\underline{I}'_2 = -6\,(1 - j)$$

Rezultă curenţii ciclici:

$$\underline{I}'_1 = j \quad \text{şi} \quad \underline{I}'_2 = -(1 + j)$$

d. Curenţii din laturi se obţin prin superpoziţia curenţilor ciclici.

$$\underline{I}_1 = \underline{I}'_1 = j\,;\ \underline{I}_2 = \underline{I}'_2 = -(1 + j)\,;\ \underline{I}_3 = \underline{I}'_1 + \underline{I}'_2 = -1$$

e. Aceleaşi rezultate s-au obtinut cu metoda teoremelor lui Kirchhoff (vezi aplicaţia de la 5.8.3.). Nu mai este deci necesară verificarea cu bilanţul puterilor.

5.8.6. Metoda potenţialelor la noduri

Această metodă se utilizează în circuite electrice liniare de curent alternativ, cu noduri puţine şi fără cuplaje inductive între bobinele circuitului respectiv.

Necunoscutele în număr de N - 1 sînt potenţialele exprimate în complex ale celor N - 1 noduri deoarece pentru cel de al N-lea nod se adoptă potenţial de referinţă egal cu zero.

Pentru un circuit cu N = 3 noduri, numărul ecuaţiilor care se scriu sînt N - 1 = 3 - 1 = 2 ecuaţii. Ecuaţiile sînt

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{11}\,\underline{V}_1 + \underline{Y}_{12}\,\underline{V}_2 &= \underline{I}'_{sc\ 1} \\ \underline{Y}_{21}\,\underline{V}_1 + \underline{Y}_{22}\,\underline{V}_2 &= \underline{I}'_{sc\ 2} \end{aligned} \qquad (5.169)$$

în care termenii au următoarele semnificaţii:

$\underline{V}_1$ şi $\underline{V}_2$ sînt potenţialele exprimate în complex pentru nodul 1 şi 2 Cel de al 3-lea nod are potenţialul adoptat egal cu zero;

$\underline{Y}_{11}$ şi $\underline{Y}_{22}$ sînt admitanţele complexe proprii ale nodurilor 1 şi 2. Se calculează ca sumă a admitanţelor complexe ale laturilor care concură în nodul 1 respectiv 2. Se adoptă totdeauna semnul plus;

$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$ sînt admitanţele complexe comune nodurilor 1 şi 2. Se calculează ca sumă a admitanţelor complexe din laturile care unesc direct nodurile 1 şi 2. Se adoptă totdeauna semnul minus;

$\underline{I}'_{sc1}$ şi $\underline{I}'_{sc2}$ reprezintă curenţii complecşi de scurtcircuit ai nodului 1 respectiv 2. Se calculează ca sumă a curenţilor complecşi de scurtcircuit ai laturilor care concură în nodul 1 respectiv 2. Se adoptă semnul plus pentru curenţii de scurtcircuit care intră în nod şi semnul minus pentru cei care ies din nod. Curenţii complecşi de scurtcircuit ai laturilor pasive sînt nuli.

Curentul complex de scurtcircuit al unei laturi este curentul care ar circula prin latură dacă ar fi scurtcircuitată. Pentru o latură în care există o sursă de tensiune ideală (fig. 5.95) acest curent de scurtcircuit este

$$\underline{I}_{sca} = \frac{\underline{E}_k}{\underline{Z}_k} \quad . \tag{5.170}$$

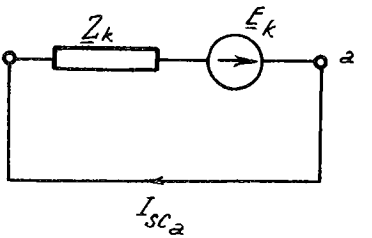


Fig. 5.95. Curentul de scurtcircuit $\underline{I}_{sca}$.

Necunoscutele principale, curenţii complecşi din laturi, se calculează cu ajutorul potenţialelor complexe ale nodurilor, determinate din sistemul de ecuaţii (5.169).

In latura 1 legată între nodul 1 şi 2 în care este plasată o sursă ideală de tensiune $\underline{E}_1$ (sensul este de la nodul 1 la 2) şi o admitanţă Y_1 (fig. 5.96), curentul complex este

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1 (\underline{E}_1 + \underline{V}_1 - \underline{V}_2). \tag{5.171}$$

Se fac următoarele precizări în legătură cu semnele:

a. Tensiunea electromotoare $\underline{E}_1$ se scrie cu plus dacă are acelaşi sens cu al curentului $\underline{I}_1$; în caz contrar se scrie cu minus;

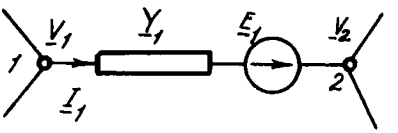


Fig. 5.96.

b. Dacă curentul $\underline{I}_1$ circulă de la nodul cu potenţial $\underline{V}_1$ la nodul cu potenţial $\underline{V}_2$, în relaţie $\underline{V}_1$ se scrie cu plus şi $\underline{V}_2$ cu minus; contrar, se scrie cu minus.

Metoda potenţialelor la noduri se utilizează astfel:

a. se alege nodul cu potenţial zero;

b. se scrie sistemul de ecuaţii ale potenţialelor la noduri de forma (5.169) şi se rezolvă sistemul determinîndu-se necunoscutele, potenţialele complexe la noduri;

c. se determină curenţii din laturi aplicînd relaţia de forma (5.171);

d. se verifică rezultatele cu bilanţul puterilor.

Aplicaţie

Să se rezolve circuitul electric din fig. 5.97 cu metoda potenţialelor la noduri.

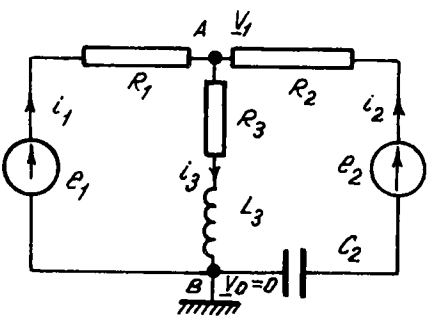


Fig. 5.97.

Date:

$R_1 = 2\Omega$; $R_2 = 5\ \Omega$; $R_3 = 3\ \Omega$; $\omega L_3 = 3\ \Omega$; $\frac{1}{\omega C_2} = 1\Omega$; $e_1 = 8\sqrt{2}\sin\omega t$ (V);

$\underline{E}_1 = 8$; $e_2 = 10\ \sin\ (\omega t - \frac{\pi}{4})$ (V); $\underline{E}_2 = 5(1 - j)$.

a. In fig. 5.97 s-a ales potenţialul $\underline{V}_o = 0$ şi s-a notat potenţialul nodului A cu $\underline{V}_1$.

b. Sistemul de ecuaţii al potenţialelor la noduri are N-1=2-1=1 ecuaţii de forma:

$$\underline{Y}_{11}\,\underline{V}_1 = \underline{I}_{sc1}$$

în care admitanţa complexă

$$\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3$$

este suma admitanţelor din laturile care se leagă la nodul 1.

Deci

$$\underline{Y}_{11} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}$$

sau

$$\underline{Y}_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + \dfrac{1}{j\omega C_2}} + \frac{1}{R_3 + j\omega L_3}$$

sau

$$\underline{Y}_{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5 - j} + \frac{1}{3 + 3\,j} = \frac{34 + 16\,j}{2\,(3+3\,j)(5-j)}\,.$$

Curentul de scurtcircuit este

$$\underline{I}'_{sc1} = \frac{\underline{E}_1}{R_1} + \frac{\underline{E}_2}{R_2 + \dfrac{1}{j\omega C_2}} = \frac{8}{2} + \frac{5(1 - j)}{5 - j} = \frac{50 - 18\,j}{2(5 - j)}\,.$$

Potenţialul complex al nodului 1 rezultă

$$\underline{V}_1 = \frac{\underline{I}'_{sc1}}{\underline{Y}_{11}} = 6 \text{ V}.$$

c. Curenţii din laturi rezultă:

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1 (\underline{E}_1 + \underline{V}_0 - \underline{V}_1) = \frac{1}{2}(8 + 0 - 6) = 1 = e^{j0^o};$$

$$i_1 = \sqrt{2} \sin \omega t \text{ (A) şi } I_1^* = 1 ;$$

$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_2 (\underline{E}_2 + \underline{V}_0 - \underline{V}_1) = \frac{1}{5 - j}\left[5(1-j) - 6\right] = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}};$$

$$i_2 = \sqrt{2} \sin (\omega t - \frac{\pi}{2}) \text{ (A) şi } I_2^* \quad j ;$$

$$\underline{I}_3 = \underline{Y}_3 (\underline{E}_3 + \underline{V}_1 - \underline{V}_0) = \frac{1}{3 + 3j}(0 + 6 - 0) = 1 - j ;$$

$$i_3 = 2 \sin (\omega t - \frac{\pi}{4}) \quad \text{(A)} .$$

Rezultatele se verifică cu bilanţul puterilor:

$$\sum_{k=1}^{3} \underline{E}_k \underline{I}_k^* = \sum_{k=1}^{3} R_k I_k^2 + j \sum_{k=1}^{3} (\omega L_k - \frac{1}{\omega C_k}) I_k^2$$

sau

$$\underline{E}_1 \underline{I}_1^* + \underline{E}_2 \underline{I}_2^* = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + j\omega L_3 I_3^2 - \frac{j}{\omega C_2} I_2^2$$

sau

$$8.1 + 5(1-j)(+j) = 2.1^2 + 5.1^2 + 3(\sqrt{2})^2 + 3\, j(\sqrt{2})^2 - j.1^2$$

sau

$$13 + 5\, j = 13 + 5\, j .$$

Se constată că puterea activă generată este egală cu puterea activă consumată,

$$P_g = P_c = 13 \text{ W}$$

şi puterea reactivă generată este egală cu puterea reactivă consumată,

$$Q_g = Q_c = 5 \text{ VAr}.$$

5.8.7. Metoda generatoarelor echivalente

Un circuit liniar complex poate fi echivalat, în raport cu două borne A şi B ale sale, printr-un generator echivalent de tensiune complexă $\underline{U}_{ABo}$ şi impedanţa internă complexă $\underline{Z}_{ABo}$ sau printr-un generator echivalent de curent complex $\underline{I}_{ABsc}$ şi admitanţă internă complexă $\underline{Y}_{ABo}$ conform fig. 5.98 a şi b.

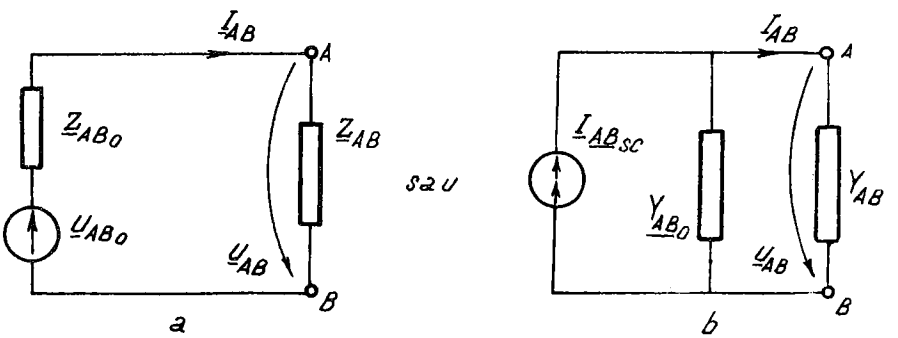


Fig. 5.98. Circuit electric reprezentat prin: a. generator echivalent de tensiune complexă; b. generator echivalent de curent complex.

Circuitul electric poate conţine cuplaje magnetice interioare dar în cele ce urmează, studiul se limitează la circuite electrice fără cuplaje magnetice.

Teorema lui Thévenin arată că într-o impedanţă $\underline{Z}_{AB}$ legată între bornele A şi B (fig. 5.98 a) se naşte curentul complex:

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{ABo}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{ABo}} \cdot \qquad (5.172)$$

Se mai numeşte teorema generatorului echivalent de tensiune.

Teorema lui Norton arată că tensiunea între bornele A şi B, cînd se leagă admitanţa $\underline{Y}_{AB}$ (fig. 5.98 b), este

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{I}_{ABsc}}{\underline{Y}_{AB} + \underline{Y}_{ABo}} \qquad (5.173)$$

în care:

$\underline{U}_{ABo}$ este tensiunea complexă de mers în gol a circuitului în raport cu bornele A şi B;

$\underline{I}_{AB_{sc}}$ este curentul complex de scurtcircuit al circuitului în raport cu bornele A şi B;

$\underline{Z}_{ABo}$ şi $\underline{Y}_{ABo}$ sînt impedanţa respectiv admitanţa complexă a reţelei pasivizate în raport cu bornele A şi B.

Generatoarele de tensiune şi de curent sînt echivalente între ele. Relaţiile de echivalenţă sînt:

$$\underline{U}_{ABo} = \underline{Z}_{ABo}\,\underline{I}_{ABsc} \; ; \underline{I}_{ABsc} = \underline{Y}_{ABo}\,\underline{U}_{ABo} \quad \text{şi} \quad \underline{Z}_{ABo} = \frac{1}{\underline{Y}_{ABo}} \; . \qquad (5.174)$$

Aplicaţie

Pentru circuitul electric din fig. 5.99 să se determine elementele generatoarelor echivalente de tensiune şi curent în raport cu latura pasivă AB

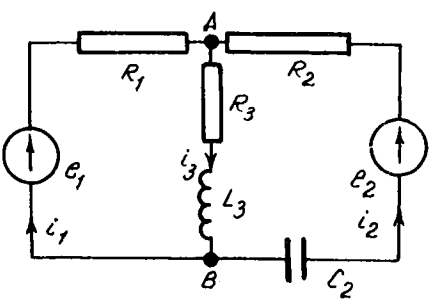


Fig. 5.99.

Date:

$R_1 = 2\Omega$; $R_2 = 5\,\Omega$; $R_3 = 3\,\Omega$; $\omega L_3 = 3\Omega$; $\frac{1}{\omega C_2} = 1\,\Omega$; $e_1 = 8\sqrt{2}\sin\omega t$ (V);

$\underline{E}_1 = 8$; $e_2 = 10 \sin(\omega t - \frac{\pi}{4})$ (V); $\underline{E}_2 = 5(1 - j)$

a. Elementele generatorului echivalent de tensiune.

Tensiunea U_{ABo} se calculează din circuitul reprezentat în fig. 5.100.

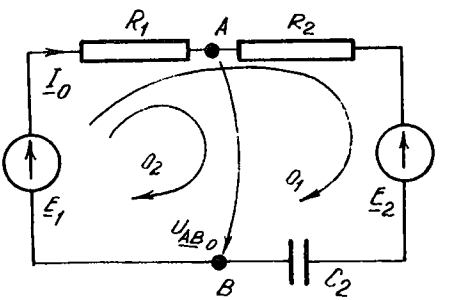


Fig. 5.100.

Se determină mai întîi curentul $\underline{I}_0$ cu ajutorul teoremei a doua a lui Kirchhoff scrisă pe ochiul o_1;

$$(R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C_2})\,\underline{I}_0 = \underline{E}_1 - \underline{E}_2 .$$

Rezultă curentul $\underline{I}_0$;

$$I_0 = \frac{8 - 5(1 - j)}{2 + 5 - j} = \frac{3 + 5\,j}{7 - j} .$$

Pentru determinarea tensiunii $\underline{U}_{ABo}$ se scrie pentru ochiul o_2:

$$\underline{U}_{ABo} + R_1\,\underline{I}_0 = \underline{E}_1$$

sau

$$\underline{U}_{ABo} = \underline{E}_1 - R_1 \underline{I}_o = 8 - 2\,\frac{3 + 5\,j}{7 - j} = \frac{50 - 18\,j}{7 - j}\,.$$

Impedanţa $\underline{Z}_{ABo}$ se determină tot din fig. 5.100:

$$\underline{Z}_{ABo} = \frac{R_1\left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right)}{R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{2\,(5 - j)}{2 + 5 - j} = \frac{10 - 2\,j}{7 - j}\,.$$

Conform teoremei lui Thévenin:

$$\underline{I}_{AB} = \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{ABo}}{\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{ABo}} = \frac{\frac{50 - 18\,j}{7 - j}}{3 + 3\,j + \frac{10 - 2\,j}{7 - j}} = 1 - j\,.$$

Acelaşi rezultat s-a obţinut prin metoda potenţialelor la noduri (vezi 5.8.6. - Aplicaţie).

Circuitul echivalent cu generator de tensiune este prezentat în fig. 5.101 a.

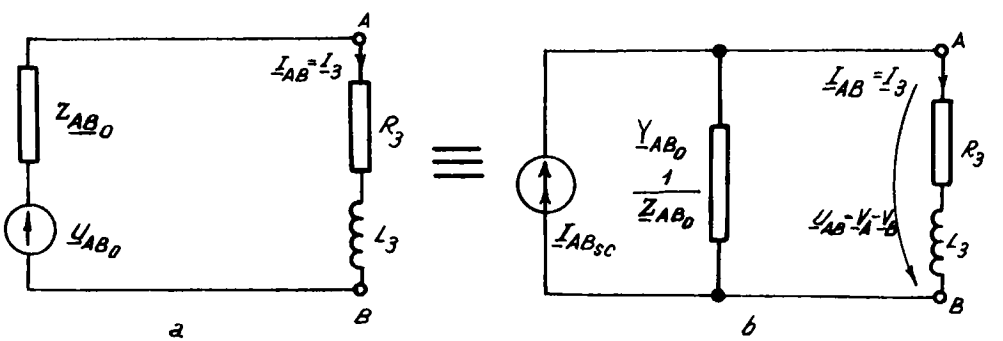


Fig. 5.101.

b. Elementele generatorului echivalent de curent.

Curentul $\underline{I}_{ABsc}$ se determină din circuitul reprezentat în fig. 5.102.

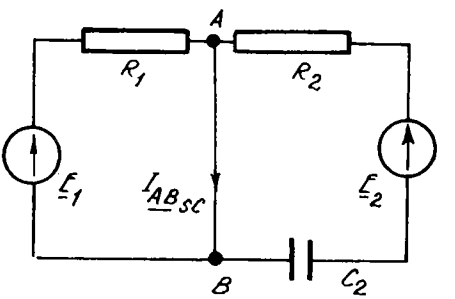


Fig. 5.102.

$$\underline{I}_{ABsc} = \frac{\underline{E}_1}{R_1} + \frac{\underline{E}_2}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{8}{2} + \frac{5(1-j)}{5-j} = \frac{8(5-j)+10(1-j)}{10-2j} =$$

$$= \frac{50-18j}{10-2j} .$$

Se verifică şi relaţia de echivalenţă:

$$\underline{I}_{ABsc} = \frac{\underline{U}_{ABo}}{\underline{Z}_{ABo}} = \frac{\frac{50-18j}{7-j}}{\frac{10-2j}{7-j}} = \frac{50-18j}{10-2j} .$$

Admitanţa:

$$\underline{Y}_{ABo} = \frac{1}{\underline{Z}_{ABo}} = \frac{7-j}{10-2j} .$$

Conform teoremei lui Norton

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{I}_{ABsc}}{\underline{Y}_{ABo} + \underline{Y}_{AB}} = \frac{\dfrac{50 - 18\,j}{10 - 2\,j}}{\dfrac{7 - j}{10 - 2\,j} + \dfrac{1}{3 + 3\,j}} = 6\ V\,.$$

Acelaşi rezultat s-a obţinut prin metoda potenţialelor la noduri (vezi 5.8.6 - Aplicaţie):

$$\underline{U}_{AB} = \underline{V}_{A} - \underline{V}_{B} = 6\ V$$

Circuitul echivalent cu generator de curent este prezentat în fig. 5.101 b.

CAPITOLUL 6

REGIMUL TRANZITORIU IN CIRCUITELE ELECTRICE

In capitolele anterioare s-au studiat circuitele electrice într-un regim permanent de funcţionare. Intr-un regim permanent de curent continuu tensiunile şi curenţii au valori constante. In circuitele de curent alternativ sinusoidal sau nesinusoidal, regimul permanent se caracterizează prin valori constante ale amplitudinilor, tensiunilor şi curenţilor precum şi a defazajelor dintre acestea.

Ce reprezintă regimul tranzitoriu în circuitele electrice?

In fig. 6.1 s-a reprezentat un circuit electric simplu constituit din legarea în serie a unui rezistor R şi a bobinei L la o sursă de curent continuu cu tensiune electromotoare E. Inchiderea circuitului se face prin intermediul întrerupătorului $\mathcal{J}$. La momentul t = 0 se închide întrerupătorul $\mathcal{J}$.

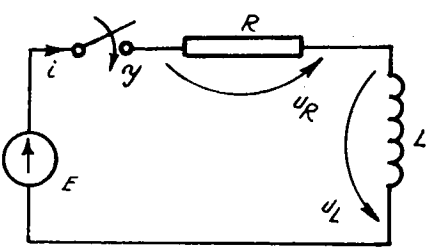


Fig. 6.1. Circuit electric RL în regim tranzitoriu.

După un interval de timp destul de lung - se spune cînd t este infinit - curentul I devine:

$$i_{t=\infty} = I = \frac{E}{R}$$

adică are o valoare bine definită. Dar înainte de închiderea lui $\mathcal{J}$ curentul era egal cu zero (circuit electric deschis).

Intervalul de timp cuprins între închiderea întrerupătorului $\mathcal{J}(i/_{t=0}=0)$ şi t = infinit ($i_{t=\infty} = \frac{E}{R}$) se numeşte <u>interval tranzitoriu</u>. Regimul de funcţionare al circuitului se numeşte <u>regim tranzitoriu</u>.

Regimul tranzitoriu nu se constată numai la închiderea sau deschiderea unui întrerupător pentru alimentarea unui circuit electric. O variaţie bruscă a tensiunii de alimentare, conectarea sau deconectarea unor elemente de circuit active sau pasive, scurtcircuitele etc. pot determina regimuri tranzitorii.

<u>Tensiuni şi curenţi tranzitorii</u> sînt tensiunile şi curenţii din perioada regimului tranzitoriu. Aceştia depind de timp şi se vor nota cu litere mici: u şi i.

Caracteristica principală a regimului tranzitoriu de funcţionare a unui circuit electric este că totdeauna are loc la trecerea de la un regim permanent la altul.

Stabilirea unui regim permanent are loc întotdeauna după un proces tranzitoriu.

Pentru că regimul permanent este precedat sau se încheie cu un regim tranzitoriu, studiul acestuia din urmă prezintă o importanţă deosebită. Din acest motiv, se va studia în continuare regimul tranzitoriu al unor circuite electrice mai des întîlnite: circuitul RL, circuitul RC, alimentate de la surse de curent continuu.

Pentru a crea o imagine cît mai cuprinzătoare a fenomenului tranzitoriu, se va studia intervalul tranzitoriu şi în cazul alimentării unui rezistor R cu o tensiune electromotoare de curent continuu. Studiul regimului tranzitoriu se referă la modul în care variază tensiunea şi curentul, în funcţie de timp, la bornele elementului de circuit sau în circuitul electric respectiv.

Deoarece în intervalul tranzitoriu sînt anumite momente caracteristice, este necesar să se introducă notaţii pentru aceste momente:

- $t = 0-$ momentul care precede închiderea (întrerupătorul este încă deschis);
- $t = 0$ momentul în care se produce închiderea întrerupătorului (se consideră durata închiderii egală cu zero);
- $t = 0+$ momentul în care s-a terminat închiderea întrerupătorului;
- $t = \infty$ momentul la care se ajunge după un interval de timp foarte mare.

Cu aceste precizări se vor studia în continuare circuitele electrice notate mai sus.

6.1. Circuitul R.L (fig. 6.1)

Curentul electric în circuitul RL are următoarele valori:

a. t = 0- curentul i(0-) = 0 deoarece circuitul electric este deschis (întrerupătorul $\mathcal{J}$ este încă deschis);

b. t = 0+ curentul i(0+) = 0 este de asemenea zero şi în momentul în care s-a terminat închiderea întrerupătorului $\mathcal{J}$ la fel ca înaintea închiderii. De ce? Pentru că energia acumulată în cîmpul magnetic al bobinei $w_m = \frac{L\,i^2}{2}$ nu poate avea un salt în variaţia sa (se numeşte discontinuitate) deoarece puterea ar trebui să fie extraordinar de mare (infinită). Dar circuitele electrice întîlnite în practică nu conţin surse sau consumatori de putere infinită. Prin urmare:

$$i(0-) = i(0+) = 0 .$$

Curentul electric printr-o bobină nu variază prin salt (discontinuu) în momentul trecerii de la regim permanent la regim tranzitoriu. In acest caz, se afirmă că în momentul închiderii întrerupătorului $\mathcal{J}$ curentul electric nu variază.

c. $t = \infty$ curentul $i(\infty)$ se stabilizează şi devine egal cu

$$i_{t=\infty} = i(\infty) = I = \frac{E}{R} .$$

Tensiunea electrică în circuitul R L are două componente: tensiunea la bornele bobinei L, notată cu u_L, şi tensiunea la bornele rezistorului R, notată cu u_R.

Tensiunile u_L şi u_R au următoarele valori:

a) t = 0-
- tensiunea $u_L(0-) = 0$,
- tensiunea $u_R(0-) = 0$ deoarece circuitul electric este deschis.

b. $t = 0+$

Tensiunea $u_R(0+) = R\ i(0+) = R \cdot 0 = 0$ deoarece curentul $i(0+) = 0$.

Tensiunea $u_L(0+)$ se deduce din teorema a doua a lui Kirchhoff:

$$u_R(0+) + u_L(0+) = E$$

sau

$$0 + u_L(0+) = E .$$

In momentul imediat închiderii întrerupătorului $\mathcal{J}$, la bornele bobinei, este o tensiune egală cu tensiunea electromotoare a sursei.

La bornele unei bobine are loc un salt (discontinuitate) de tensiune în momentul trecerii de la regim permanent la regim tranzitoriu.

c. $t = \infty$

Tensiunea

$$u_R(\infty) = R\ i(\infty) = R\ I = R\ \frac{E}{R} = E$$

După un interval de timp foarte mare se ajunge la un regim permanent. La bornele rezistenţei R există o tensiune egală cu tensiunea electromotoare a sursei de curent continuu.

Tensiunea $u_L(\infty) = 0$. Tensiunea la bornele bobinei (presupusă ideală) este nulă.

Dacă se grupează aceste date în tabelul 6.1 se obţine:

Tabelul 6.1

Momentul t	i	u_R	u_L
0-	0	0	0
0+	0	0	E
∞	$\frac{E}{R}$	E	0

Expresia matematică a curentului şi tensiunii tranzitorii în circuit RL.

Din tabelul de mai sus, se constată că mărimile electrice, curent şi tensiune variază în funcţie de timp. Fără a prezenta o demonstraţie matematică, această variaţie se exprimă astfel pentru curent:

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad (6.1)$$

în care:

- $i(t)$ - valoarea instantanee a curentului electric prin circuitul RL la timpul t;
- E - tensiunea electromotoare a sursei de curent continuu;
- R - rezistenţa rezistorului din circuit;
- t - timpul. Poate lua diferite valori (Ex.: $t = 0+$ sau $t=\infty$);
- e - număr folosit în matematică ($e = 2,73...$);
- $\tau = \frac{L}{R}$ - constanta de timp; Se notează cu litera grecească τ (tau). Se măsoară în secunde (s);
- L - reprezintă inductivitatea bobinei din circuit.

Referitor la constanta de timp τ trebuie subliniat că această mărime caracterizează viteza de variaţie a mărimilor tranzitorii în circuitul în care există un regim tranzitoriu. Din punct de vedere teoretic, durata unui proces tranzitoriu este infinită dar în practică se adoptă această durată ca fiind egală cu $t = (4 \div 5)\tau$.

Expresia matematică 6.1 este reprezentată grafic în fig. 6.2 a.

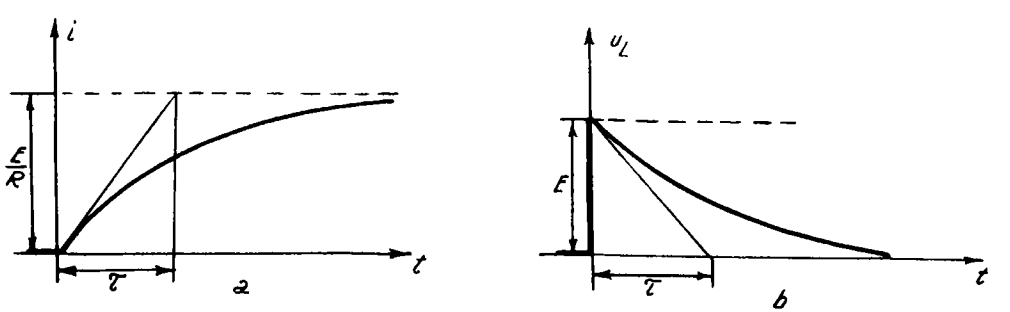


Fig. 6.2. Curentul tranzitoriu (a) şi tensiunea tranzitorie (b) în circuitul RL.

Tensiunea electrică la bornele bobinei variază astfel:

$$u_L(t) = E\, e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (6.2)$$

în care:

u_L (t)-valoarea instantanee a tensiunii electrice la bornele bobinei.

Restul termenilor au fost explicaţi anterior.

In fig. 6.2 b este reprezentată grafic expresia matematică (6.2).

6.2. Circuitul R.C. (fig. 6.3)

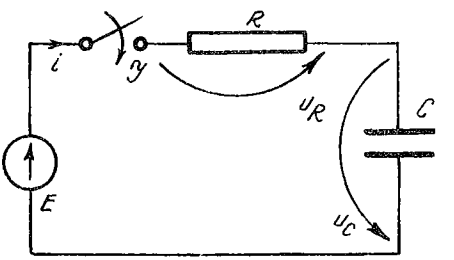


Fig. 6.3. Circuit electric RC în regim tranzitoriu.

Tensiunea electrică în circuitul RC are două componente: tensiunea la bornele condensatorului C notată cu u_c şi tensiunea la bornele rezistorului R notată cu u_R.

Tensiunile u_c şi u_R au următoarele valori:

a. t = 0-; tensiunea u_c (0-) = 0 deoarece circuitul electric este deschis prin întrerupătorul $\mathcal{J}$ şi pe armăturile condensatorului nu există sarcină electrică.

Tensiunea u_R (0-) = 0 de asemenea, circuitul este deschis.

b.t.= 0+;tensiunea u_c (0+) = 0 şi în momentul în care s-a terminat închiderea întrerupătorului $\mathcal{J}$ la fel ca înaintea închiderii. De ce? Tot din considerente energetice. Dacă tensiunea u_c ar avea un salt de tensiune de la t=0- la t=0+, atunci şi energia condensatorului

$$w_e = \frac{C\, u_c^2}{2}$$

trebuie să prezinte un salt în variaţia sa. Dar la fel ca în cazul bobinei, variaţia bruscă a energiei implică o putere extraordinar de mare (infinită). La fel şi aici, circuitul electric nu are o sursă de putere infinită. Prin urmare:

$$u_c\ (0-) = u_c\ (0+) = 0$$

iar în general

$$u_c\ (0-) = u_c\ (0+).$$

Tensiunea electrică la bornele condensatorului nu variază prin salt (discontinuu) în momentul trecerii de la regim permanent la regim tranzitoriu.

In acest caz,se spune că în momentul închiderii întrerupătorului $\mathcal{J}$, tensiunea electrică de la bornele condensatorului nu variază.

Tensiunea u_R (0+) se deduce din teorema a doua a lui Kirchhoff:

$$u_R\ (0+) + u_c\ (0+) = E$$

dar

$$u_c\ (0+) = 0$$

şi rezultă

In momentul imediat închiderii întrerupătorului $\mathcal{I}$, la bornele rezistorului este o tensiune egală cu tensiunea electromotoare a sursei.

La bornele unui rezistor dintr-un circuit RC, are loc un salt (discontinuu) de tensiune în momentul trecerii de la regim permanent la regim tranzitoriu.

c. $t = \infty$

Tensiunea

$$u_R(\infty) = R\, i(\infty) = R \cdot 0 = 0$$

deoarece după un timp foarte mare, curentul electric într-un circuit RC devine zero.

Tensiunea

$$u_c(\infty) = E;$$

la bornele condensatorului C, există o tensiune egală cu tensiunea electromotoare a sursei de curent continuu.

Curentul electric într-un circuit RC are următoarele valori:

a. $t = 0-$ curentul $i(0-) = 0$ deoarece circuitul electric este deschis de întrerupătorul $\mathcal{I}$.

b. $t = 0+$ curentul

$$i(0+) = \frac{u_R(0+)}{R} = \frac{E}{R}$$

deoarece în momentul imediat următor închiderii întrerupătorului $\mathcal{I}$, tensiunea la bornele rezistorului

$$u_R(0+) = E$$

prezintă un salt .

Curentul electric printr-un circuit RC variază prin salt (discontinuu) în momentul trecerii de la regimul permanent la regimul tranzitoriu.

c. $t = \infty$, curentul $i(\infty) = 0$; după un timp foarte mare, prin circuit nu se mai află purtători de sarcină în mişcare adică curentul a devenit nul; condensatorul s-a "încărcat" cu sarcini electrice.

Dacă se grupează datele în tabelul 6.2 se obţine:

Tabelul 6.2.

momentul t	i	u_R	u_C
0-	O	O	O
0+	$\frac{E}{R}$	E	O
∞	O	O	E

Expresia matematică a curentului şi tensiunii tranzitorii într-un circuit RC. Din tabelul de mai sus se constată că şi în circuitul RC, mărimile electrice curent şi tensiune variază în funcţie de timp.

Fără demonstraţie matematică, această variaţie se exprimă pentru tensiunea electrică de la bornele condensatorului astfel

$$u_c(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad (6.3)$$

în care:

- $u_c(t)$ - valoarea instantanee a tensiunii electrice de la bornele condensatorului în circuitul RC, la timpul t;
- E - tensiunea electromotoare a sursei de curent continuu;
- t - timpul (Ex.: t = 0+, $t = \infty$ sau t = 3 sec);
- e - număr folosit în matematică (e = 2,73 ...);
- $\tau = RC$ - constanta de timp (R - este rezistenţa rezistorului iar C reprezintă capacitatea condensatorului din circuitul RC).

Expresia matematică (6.3) este reprezentată grafic în fig. 6.4 a.

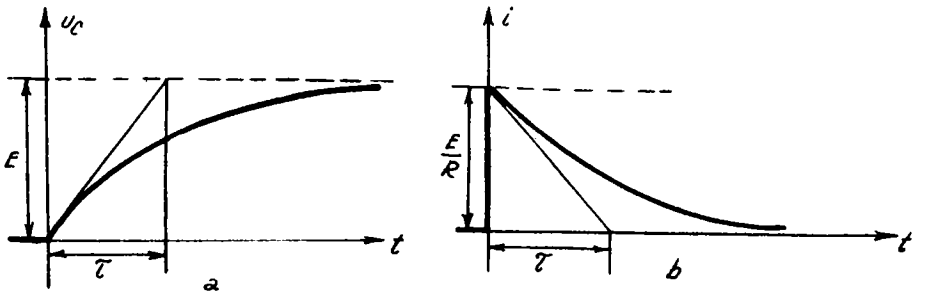


Fig. 6.4. Tensiunea tranzitorie (a) şi curentul tranzitoriu (b) în circuitul RC.

Curentul electric prin circuitul RC variază astfel

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (6.4)$$

în care:

i(t) - valoarea instantanee a curentului electric prin circuitul RC.

Ceilalţi termeni au fost explicaţi mai sus.

In fig. 6.4 b este reprezentată grafic expresia matematică (6.4).

6.3. Circuitul R (fig. 6.5)

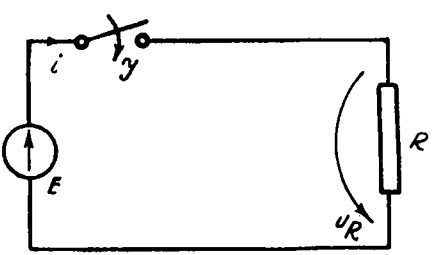


Fig. 6.5. Circuitul electric R în regim tranzitoriu.

Pentru acest circuit, se va studia variaţia curentului şi tensiunii de la bornele rezistorului u_R în perioada tranzitorie.

Tensiunea electrică u_R şi curentul i au următoarele valori:

a. $t = 0-$; tensiunea $u_R(0-) = 0$ deoarece circuitul electric este deschis prin întrerupătorul $\mathcal{J}$.

Curentul $i(0-) = 0$ din aceleaşi considerente.

b. $t = 0+$; tensiunea $u_R(0+) = E$. Se obţine scriind teorema a doua a lui Kirchhoff.

Curentul

$$i(0+) = \frac{u_R(0+)}{R} = \frac{E}{R} .$$

c. $t = \infty$; tensiunea

$$u_R(\infty) = E$$

iar curentul electric

$$i(\infty) = \frac{E}{R}$$

aceleaşi valori ca în momentul $t = 0+$.

Tensiunea şi curentul într-un circuit R, variază prin salt (discontinuu) în momentul trecerii de la regim permanent la regim tranzitoriu (şi invers).

Expresiile matematice pentru tensiune şi curent se scriu sub forma:

$$u_R = E \quad \text{şi} \quad i = \frac{E}{R} . \qquad (6.5)$$

Reprezentarea grafică este conform fig. 6.6 a şi b.

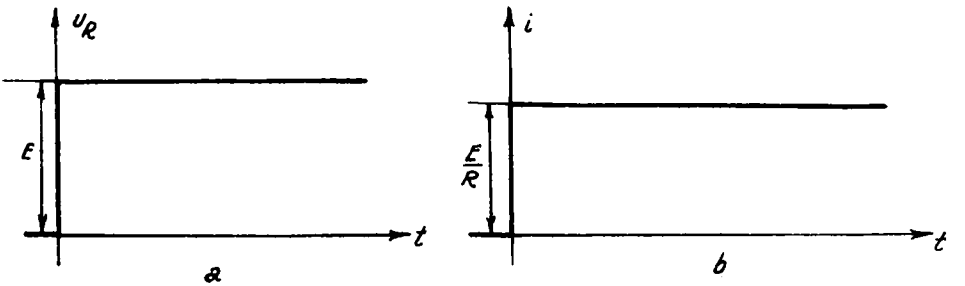


Fig. 6.6. Tensiunea tranzitorie (a) şi curentul tranzitoriu (b) într-un circuit R.

OBSERVATII:

1. In primul moment al închiderii unui circuit, o bobină echivalează cu o întrerupere de circuit iar un condensator echivalează cu un scurtcircuit.

2. La deschiderea unui circuit care conţine o bobină, se formează un arc electric între contactele întrerupătorului deoarece curentul electric într-un circuit RL nu prezintă discontinuitate. In practică, se folosesc scheme de protecţie împotriva arcului electric şi a arderilor de contacte. In cazul întreruptoarelor statice (Ex.: tranzistor) pericolul este şi mai mare deoarece poate distruge elementul de comutaţie statică prin străpungere.

3. In circuitele electrice reale nu se obţin salturile ideale prezentate deoarece elementele de circuit R, L şi C nu sînt ideale; saltul de curent sau tensiune este determinat de elementul de circuit predominant în circuit.

6.4. Aplicaţii

Aplicaţia 1

1. Să se reprezinte grafic curba de variaţie în timp a curentului în înfăşurarea releului din fig. 6.7.

2. Să se determine timpul de anclanşare şi de declanşare al releului.

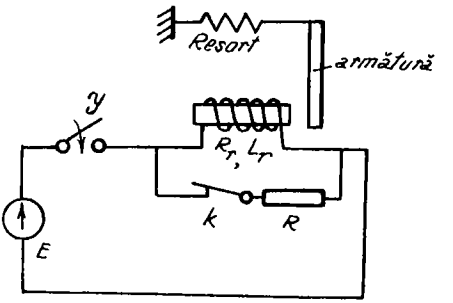


Fig. 6.7.

Date:

$R_r = 400\ \Omega$; $L_r = 6$ H; $R = 400\ \Omega$.

- Curentul de anclanşare $I_{an} = 12$ mA.
- Curentul de declanşare $I_{decl} = 8$ mA.
- Tensiunea de alimentare $E = 12$ V.

Regimul de funcţionare al releului este comandat de întrerupătorul $\mathcal{J}$ astfel ca:

- releul să fie închis pe timpul $t_{\hat{i}} = 45$ ms;
- releul să fie deschis pe timpul $t_d = 30$ ms.

Ciclul de funcţionare $t_f = t_{\hat{i}} + t_d = 45 + 30 = 75$ ms.

NOTA:

Contactul k aparţine releului şi este închis cînd releul nu este atras. Inductivitatea releului L_r = constantă.

REZOLVARE:

1. La închiderea întrerupătorului $\mathcal{J}$, releul este anclanşat şi deschide contactul k. Resortul impune eliberarea armăturii la întreruperea curentului prin înfăşurarea releului.

Circuitul electric în care este plasată înfăşurarea releului este un circuit R L. Deci, curentul va creşte progresiv conform relaţiei

$$i_{an}(t) = \frac{E}{R_r}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) \qquad (6.6)$$

în care constanta de timp $\tau_1 = \frac{L_r}{R_r}$.

Cînd atinge valoarea I_{an} = 12 mA, armătura este atrasă.

La deschiderea întrerupătorului $\mathcal{J}$, curentul va scade progresiv dar relaţia este de altă formă:

$$i_{decl}(t)=I' \, e^{-\frac{t'}{\tau_2}} \qquad (6.7)$$

în care

$$\tau_2 = \frac{L_r}{R + R_r}$$

iar t' se determină din momentul deschiderii întreruptorului $\mathcal{J}$.

Cînd se ajunge la valoarea I_{decl} = 8 mA, armătura este eliberată.

Pentru reprezentarea curbei de variaţie ascendente a curentului se înlocuieşte în relaţia (6.6) şi se obţine

$$i_{an}(t) = \frac{12}{400}(1 - e^{-\frac{t}{15}}) = 30(1 - e^{-\frac{t}{15}}) \ (mA).$$

Constanta de timp

$$\tau = \frac{L_r}{R_r} = \frac{6}{400} = 0,015 \ s = 15 \ ms.$$

Pentru diverse valori ale momentului t, se determină valoarea curentului i(t). Rezultatele sînt trecute în tabelul 6.3.

Tabelul 6.3.

t (ms)	0	15	30	45
$e^{-\frac{t}{15}}$	1	0,37	0,135	0,05
i(t) (mA)	0	18,9	26,0	28,5

Reprezentarea grafică a variaţiei curentului crescător i(t) (fig. 6.8 curba a) s-a făcut pentru intervalul de timp în care întreruptorul $\mathcal{J}$ este închis, adică pentru $t = t_{\hat{i}} = 45$ ms. Curentul după 45 ms capătă valoarea de $I_{an45} = 28,5$ mA determinată din curba a (punctul k).

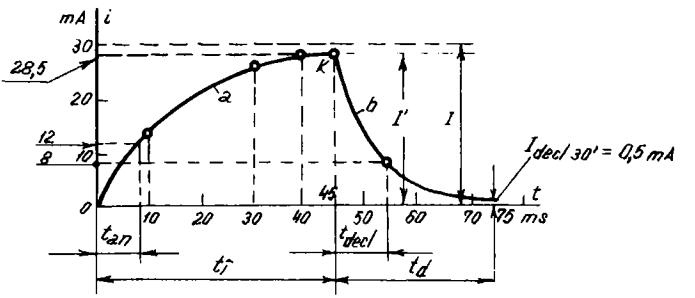


Fig. 6.8.

Dacă întreruptorul $\mathcal{J}$ nu s-ar deschide după 45 ms atunci curentul ar continua să crească pînă la valoarea I = 30 mA.

La deschiderea întreruptorului $\mathcal{J}$, curba de variaţie descendentă a curentului este descrisă de relaţia (6.7).

Prin înlocuire se obţine:

$$i = I' e^{-\frac{t'}{\tau_2}} = 28,5\, e^{-\frac{t'}{7,5}}$$

deoarece

$$\tau_2 = \frac{L_r}{R + R_2} = \frac{6}{400 + 400} = 0,0075 \text{ s}$$

sau $\tau_2 = 7,5$ ms şi $I' = I_{an45} = 28,5$ mA

Analog, rezultatele sînt trecute în tabelul 6.4.

Tabelul 6.4.

t' (ms)	0	7,5	15	30
$e^{-\frac{t'}{7,5}}$	1	0,37	0,135	0,018
i(t) (mA)	28,5	10,5	3,85	0,52

Reprezentarea grafică a variaţiei curentului descrescător $i_{decl}(t)$ s-a făcut tot în fig. 6.8. curba b.

In intervalul $t' = t_d = 30$ ms, întreruptorul $\mathcal{J}$ este deschis. Curentul capătă valoarea $I_{decl\ 30'} = 0,5$ mA determinată din curba b.

2. Timpul de anclanşare al releului se determină din reprezentarea grafică (fig. 6.8 curba a).

Pentru

$$i_{an} = 12 \text{ mA}$$

rezultă

$$t_{an} = 8 \text{ ms}.$$

Analog se determină timpul de declanşare. Din fig. 6.8 curba b se obţine:

Pentru

$$i_{decl} = 8 \text{ mA}$$

rezultă

$$t_{decl} = 9,5 \text{ ms}.$$

OBSERVAŢII:

1. La bornele înfăşurării releului şi în general la bornele unei bobine se leagă în paralel o rezistenţă pentru a diminua tensiunea electromotoare de autoinducţie care apare în înfăşurarea bobinei şi pentru a înlătura arcul electric dintre contactele întreruptorului din circuit. O tensiune electromotoare de autoinducţie prea mare poate străpunge izolaţia înfăşurării releului.

2. Cu cît rezistenţa legată în paralel este mai mică, cu atît timpul de declanşare al releului se măreşte (creşte constanta de timp).

3. Pentru a micşora timpul de anclanşare a unui releu, se conectează în serie cu înfăşurarea releului o rezistenţă legată în paralel cu un contact al acestui releu; contactul este închis cînd releul este declanşat şi invers (fig. 6.9).

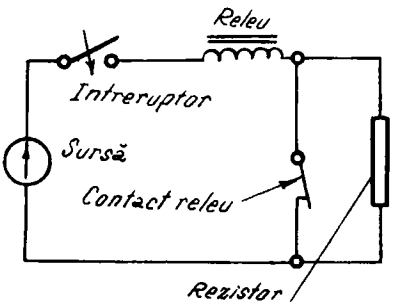


Fig. 6.9.

Aplicaţia 2

Un circuit electric compus dintr-un condensator C şi un rezistor R_1, legate în serie, este conectat cu ajutorul comutatorului k (poziţia 1) la o sursă de curent continuu cu tensiunea electromotoare E şi rezistenţa internă neglijabilă. După un timp foarte lung (condensatorul C este "încărcat") comutatorul k trece în poziţia 2 şi condensatorul este "descărcat" prin rezistenţa R_2 (fig.6.10). Condensatorul este iniţial neîncărcat.

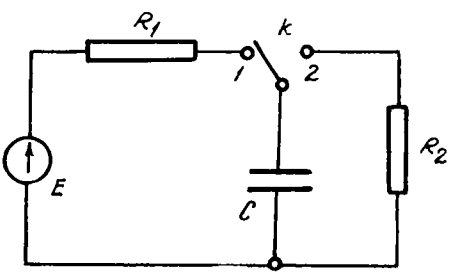


Fig. 6.10.

Se cere:

a. Reprezentarea grafică a variaţiei tensiunii şi curentului condensatorului în perioada tranzitorie de încărcare şi de descărcare a condensatorului.

După cît timp de la trecerea comutatorului k în poziţia 2, tensiunea la bornele lui R_2 atinge valoarea de 50 V?

Date:

$R_1 = 400\,\Omega$; $C = 10\,\mu F$; $R_2 = 2000\,\Omega$; $E = 120\,V$.

a. Incărcarea condensatorului

Tensiunea electrică la bornele condensatorului C variază conform relaţiei (6.3):

$$u_c = E\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}).$$

Inlocuind cu datele problemei se obţine

$$u_c = 120\,(1 - e^{-\frac{t}{4}}) \qquad (V) \qquad (6.8)$$

în care constanta de timp

$$\tau_1 = R_1\,C = 400\,.\,10\,.\,10^{-6} = 4\,.\,10^{-3}\ s$$

respectiv

$$\tau_1 = 4\ ms\ .$$

In relaţia (6.8), t este exprimat în milisecunde.

Pentru diverse valori ale momentului t, se calculează cu relaţia (6.8) tensiunea la bornele condensatorului u_c. Rezultatele sînt trecute în tabelul 6.5.

Tabelul 6.5.

t (ms)	0	2	4	8	12	16
$e^{-\frac{t}{4}}$	1	0,61	0,37	0,136	0,05	0,018
u_c (V)	0	47	75	104	114	118
i_c (mA)	300	183	111	40	15	5

Tot în tabelul 6.5 s-au trecut valorile curentului de încărcare al condensatorului C, calculate conform relaţiei (6.4):

$$i_c = \frac{E}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

sau

$$i_c = \frac{120}{400} e^{-\frac{t}{4}} \text{ (A) sau } i_c = 300\, e^{-\frac{t}{4}} \text{ (mA)} \qquad (6.9)$$

Reprezentarea grafică a tensiunii la bornele condensatorului u_c - relaţia (6.8) - şi a curentului de încărcare a condensatorului i_c - relaţia (6.9) - este redată în fig. 6.11 a.

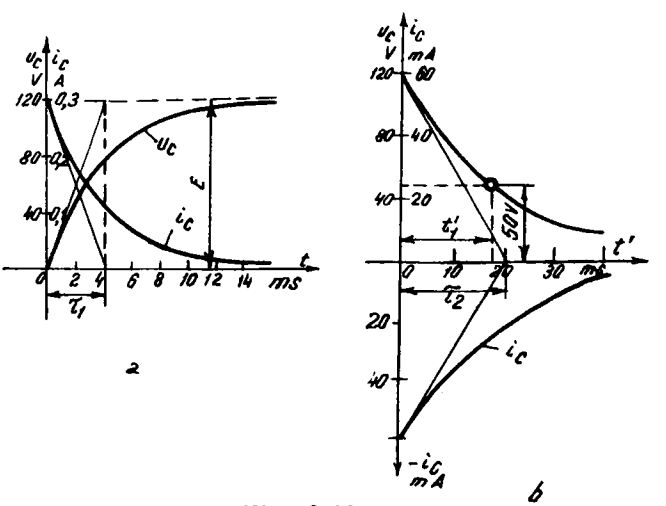


Fig. 6.11.

b. Descărcarea condensatorului

La trecerea comutatorului k în poziţia 2, apare curentul de descărcare prin rezistenţa R_2, variabil în timp.

De asemenea, tensiunea la bornele condensatorului se modifică în timp

La descărcare, tensiunea electrică la bornele condensatorului C variază astfel:

$$u_c = E\, e^{-\frac{t'}{\tau_2}} = 120\, e^{-\frac{t'}{20}} \quad (V) \qquad (6.10)$$

în care constanta de timp la descărcare

$$\tau_2 = R_2\, C = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 2000 = 20 \cdot 10^{-3}\ s$$

sau

$$\tau_2 = 20\ ms.$$

Curentul de descărcare este orientat în sens opus curentului de încărcare şi se va scrie cu semnul minus.

Variaţia este următoarea:

$$i_c = -\frac{u_c}{R} = -\frac{E}{R}\, e^{-\frac{t'}{\tau_2}} = -\frac{120}{2000}\, e^{-\frac{t'}{20}} \quad (A)$$

sau

$$i_c = -60\, e^{-\frac{t'}{20}} \quad (mA)$$

Reprezentarea grafică a celor două mărimi, tensiunea la bornele condensatorului şi curentul în procesul tranzitoriu de descărcare, este redată în fig. 6.11 b.

b. Din reprezentarea grafică a tensiunii electrice de la bornele condensatorului - egală cu tensiunea la bornele rezistorului R_2 - în procesul de descărcare, se obţine timpul $t'_1 = 17$ ms pentru $u_{c_1} = 50$ V.

OBSERVATII:

1. Dacă comutatorul k se comută de pe poziţia 1 pe poziţia 2 şi invers, la intervale de 10 ms, variaţia tensiunii la bornele comutatorului C are loc conform fig. 6.12.

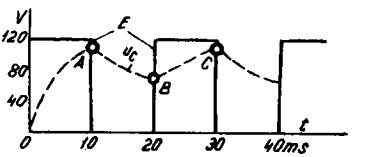


Fig. 6.12.

Fenomenul are următoarea evoluţie:

La prima conectare a sursei (condensatorul C este presupus descărcat), tensiunea creşte după curba OA.

După comutarea lui k, are loc procesul descărcării condensatorului; tensiunea scade după curba AB. Curba următoare după care se face încărcarea - curba BC - este analoagă cu curba OA dar de această dată procesul de încărcare va începe de la o tensiune iniţială diferită de zero. Curba de încărcare şi descărcare periodică obţinută este o curbă în dinţi de fierăstrău.

2. In tehnică se foloseşte frecvent ca sursă de curent continuu o sursă de curent alternativ prevăzută cu un dispozitiv denumit redresor. Tensiunea la bornele de ieşire ale redresorului are un caracter pulsatoriu (fig. 6.13 linia continuă). Dacă la bornele redresorului se conectează un condensator, tensiunea variază conform liniei punctate din fig. 6.13.

Fig. 6.13. Nivelarea pulsaţiilor de tensiune redresată.

Condensatorul nivelează pulsaţiile de tensiune dîndu-le caracter continuu.

CAPITOLUL 7

CIRCUITE NELINIARE IN REGIM SINUSOIDAL

Un circuit electric de curent alternativ sinusoidal este neliniar cînd conţine cel puţin un element de circuit neliniar.

Elemente neliniare de curent alternativ sinusoidal sînt: rezistorul neliniar, bobina neliniară, condensatorul neliniar.

Se vor prezenta aceste elemente neliniare şi conexiuni simple ale lor alimentate din surse de tensiuni electromotoare sinusoidale.

7.1. Rezistorul neliniar

Acest element de circuit a fost prezentat în capitolul 3.

Tot în acest capitol s-au indicat principalele rezistoare neliniare: lămpi cu incandescenţă, termistoare, varistoare, dioda electronică, dioda semiconductoare, dioda Zener, dioda tunel. O răspîndire largă în aplicaţiile practice o are dioda semiconductoare. Din acest motiv, se va prezenta acest element de circuit neliniar şi circuite electrice în care se utilizează dioda semiconductoare.

7.2. Dioda semiconductoare

Un astfel de element neliniar este nesimetric; pentru un sens al curentului prezintă o rezistenţă diferită de aceea pe care o prezintă în sensul opus. Caracteristicile diodelor semiconductoare cu germaniu (Ge) şi cu siliciu (Si) sînt prezentate în fig. 7.1 .

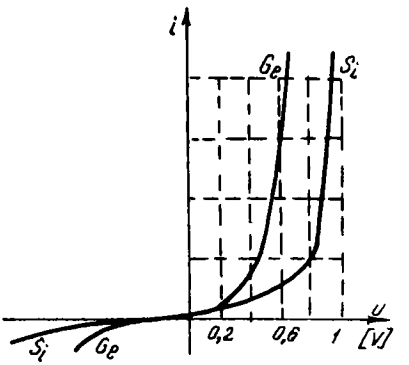


Fig. 7.1. Caracteristicile diodelor semiconductoare (Ge şi Si).

Se constată o creştere foarte mare a curentului pentru tensiuni mici aplicate la bornele diodei (caracteristica din cadranul I). Acest curent este curentul direct iar tensiunea se numeşte tensiune directă.

Curentul direct este de ordinul miliamperilor (poate atinge valori şi mai mari, zeci, sute de amperi) iar tensiunea directă este de 0,1 V... 0,7 V. Cînd dioda funcţionează după caracteristica din cadranul III, curentul prin diodă creşte foarte puţin pentru tensiuni foarte mari aplicate la bornele diodei. Acest curent este curentul invers şi atinge valori de ordinul microamperilor, iar tensiunea se numeşte tensiune inversă şi poate ajunge la sute de volţi.

Dacă dioda se utilizează într-un circuit în care curentul direct este mare în comparaţie cu curentul invers iar tensiunea inversă este mare în comparaţie cu tensiunea directă (se mai numeşte tensiune de polarizare directă) atunci se neglijează tensiunea directă şi curentul invers. O astfel de diodă este o diodă ideală. Caracteristica idealizată este prezentată în fig. 7.2 şi reprezintă un exemplu de liniarizare pe porţiuni a unei caracteristici de element neliniar.

Dioda se poate asemăna cu un întreruptor închis cînd funcţionează în cadranul I şi deschis în cadranul III. Acesta este motivul pentru care dioda semiconductoare constituie un element de comutaţie statică.

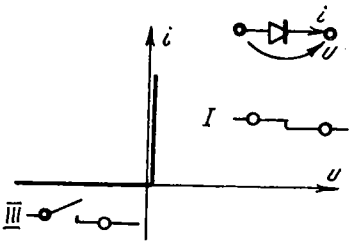


Fig. 7.2. Caracteristica idealizată a diodei semiconductoare.

Se constată că rezistenţa diodei ideale este nulă cînd dioda conduce şi infinită cînd dioda semiconductoare este blocată. O aplicaţie foarte răspîndită în practică o constituie circuitul neliniar cu diodă semiconductoare pentru transformarea tensiunii alternative în tensiune continuă. Circuitul se numeşte:

7.3. Redresorul electric

Acesta se compune din sursa de tensiune electromotoare alternativă e, dioda semiconductoare D considerată ideală şi rezistenţa de sarcină R (fig. 7.3.).

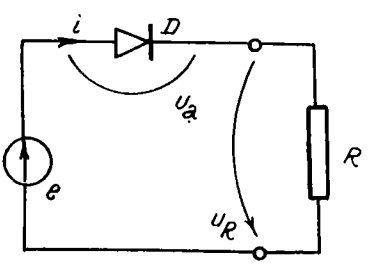


Fig. 7.3. Redresorul electric monoalternanţă.

Funcţionarea circuitului electric de redresare se desfăşoară astfel: în prima semiperioadă a tensiunii electromotoare alternative sinusoidale (fig. 7.4. a)

$$e = E_m \sin \omega t ,$$

dioda este polarizată în sens direct (cadranul I) iar curentul în circuit este

$$i = \frac{e}{R} = \frac{E_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t .$$

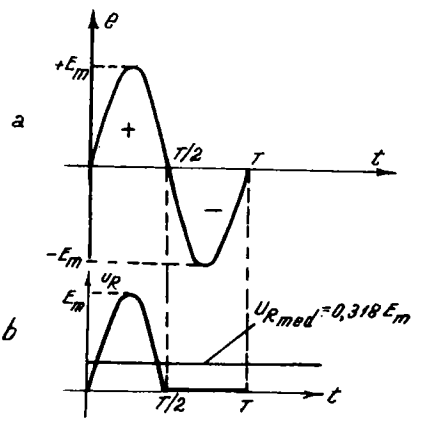


Fig. 7.4. Variaţia tensiunii electromotoare a sursei (a) şi tensiunii redresate (b) la redresorul monoalternanţă.

Tensiunea la bornele rezistenţei de sarcină u_R se determină cu teorema a doua a lui Kirchhoff scrisă pe ochiul o:

$$u_R + u_a = e . \qquad (7.1)$$

Dar pentru că dioda s-a considerat ideală (u_a = o) rezultă (fig.7.4 b)

$$u_R = e . \qquad (7.2)$$

In semiperioada următoare, tensiunea electromotoare este negativă ($e < 0$) iar dioda semiconductoare nu conduce; se spune că este blocată sau

întreruptorul static este deschis (fig. 7.4 a). Curentul prin circuit şi tensiunea la bornele rezistenţei R sînt nule.

Pentru această semiperioadă $u_R = 0$ (fig. 7,4 b).

In continuare, fenomenul fiind periodic, funcţionarea se repetă.

Valoarea medie a tensiunii redresate (componenta de curent continuu) este

$$U_{R_{med}} = \frac{E_m}{\pi} = 0,318\ E_m . \qquad (7.3)$$

Acest circuit electric de redresare, pentru că redresează o singură alternanţă dintr-o perioadă, se numeşte redresor monoalternanţă.

Pentru redresarea ambelor alternanţe se foloseşte circuit electric de redresare dublă alternanţă: redresorul dublă alternanţă. După schema de utilizare, acest tip de redresor este cu priză mediană şi în punte.

Redresorul cu priză mediană (fig. 7.5) se compune din două surse de tensiune electromotoare alternativ sinusoidale e_1 şi e_2 (generate într-un transformator cu priză mediană), două diode semiconductoare D_1 şi D_2 şi o rezistenţă de sarcină R.

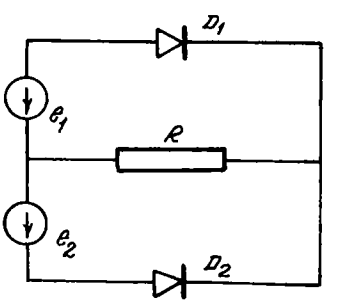


Fig. 7.5. Redresorul cu priză mediană.

Tensiunile electromotoare e_1 şi e_2 sînt în opoziţie de fază (fig.7.6 a şi b) astfel că diodele D_1 şi D_2 conduc pe rînd şi pe durata unei semiperioade.

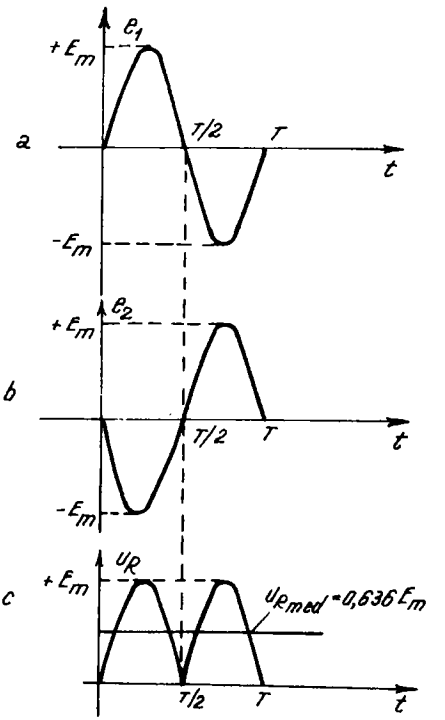


Fig. 7.6. Variaţia tensiunii electromotoare a sursei (a şi b) şi tensiunii redresate (c) la redresorul cu priză mediană.

Tensiunea la bornele rezistenţei de sarcină este pulsatorie dar valoarea medie a tensiunii redresate este dublă faţă de redresorul monoalternanţă (fig. 7.6 c):

$$U_{R_{med}} = \frac{2\ E_m}{\pi} = 0,636\ E_m . \qquad (7.4)$$

Redresorul în punte (fig. 7.7) se compune dintr-o sursă de tensiune electromotoare e, patru diode semiconductoare ($D_1 \div D_4$) şi rezistenţa de sarcină R.

Funcţionarea este următoarea (fig. 7.8): în prima semiperioadă, diodele D_1 şi D_4 sînt polarizate direct şi pentru că sînt considerate ideale,

tensiunea la bornele rezistenţei de sarcină u_R este egală cu tensiunea electromotoare e:

$$u_R = e$$

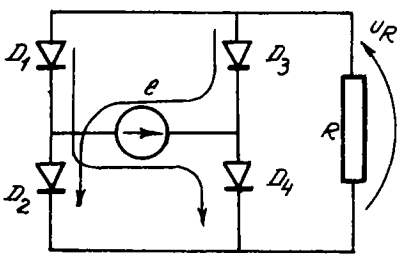


Fig. 7.7. Redresorul în punte.

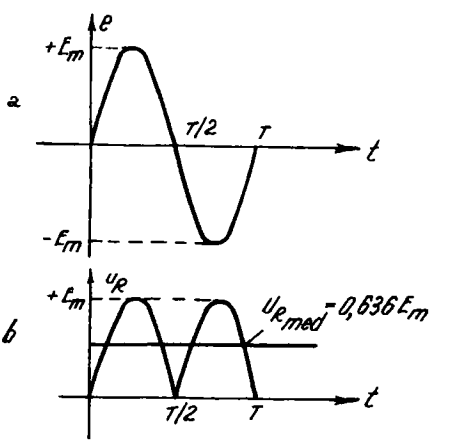


Fig. 7.8. Variaţia tensiunii electromotoare a sursei (a) şi tensiunii redresate (b) la redresorul în punte.

Diodele D_2 şi D_3 nu conduc pentru că sînt polarizate invers (sînt "întrerupte").

In semiperioada următoare vor conduce diodele D_2 şi D_3 iar D_1 şi D_4 vor fi blocate; şi în acest caz vom avea

$$u_R = e .$$

Tensiunea la bornele rezistenţei de sarcină u_R, respectiv curentul prin rezistorul R, îşi păstrează sensul ca în prima semiperioadă. Procesul se repetă, fenomenul fiind periodic.

Valoarea medie (componenta de curent continuu) este şi aici dublă faţă de redresorul monoalternanţă (fig. 7.8 b):

$$U_{R_{med}} = \frac{2\ E_m}{\pi} = 0,636\ E_m \qquad (7.5)$$

PRECIZARI:

1. Redresorul electric reprezintă o parte componentă a unei surse de curent continuu (obţinută prin transformarea energiei unei surse de curent alternativ sinusoidal). Pentru circuite electronice, sursa de curent continuu mai conţine: filtrul de netezire a formei de undă pulsatorie şi stabilizatorul tensiunii redresate şi filtrate.

2. Tensiunea anodică de polarizare directă trebuie să ajungă la cîteva zecimi de volţi pentru a obţine valori importante pentru curentul direct. Această tensiune anodică se numeşte tensiune de prag şi are următoarele valori:

- diodă cu germaniu 0,2... 0,4 V;
- diodă cu siliciu 0,5... 0,7 V.

Pentru tensiuni inferioare tensiunii de prag, dioda se prezintă ca un întreruptor deschis.

7.4. Bobina neliniară

Bobina cu miez feromagnetic din componenţa releelor, electromagneţilor, transformatoarelor şi maşinilor electrice, constituie un element neliniar în circuitele de curent alternativ sinusoidal. Considerăm o bobină cu miez feromagnetic compusă din N spire şi rezistenţa electrică r (fig. 7.9).

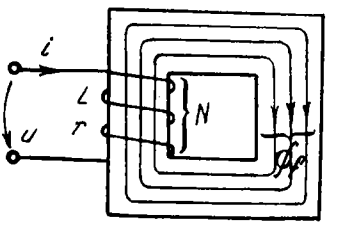


Fig. 7.9. Bobina cu miez feromagnetic alimentată cu tensiunea u.

La bornele acestei bobine se aplică o tensiune electrică de alimentare sinusoidală a cărei valoare instantanee este u.

In regim permanent sinusoidal, prin bobină se va stabili curentul de valoare instantanee i. La rîndul său, curentul i va da naştere fluxului fascicular φ_f. Liniile de inducţie magnetică corespunzătoare acestui flux se vor închide prin circuitul magnetic al bobinei.

Fluxul total din miezul feromagnetic (se neglijează fluxul care se închide prin aer) va fi

$$\varphi_t = N \varphi_f .$$

Fluxul total φ_t generat de curentul de magnetizare i va avea o dependenţă neliniară faţă de acesta (fig. 7.10).

Reprezentarea grafică respectivă se numeşte caracteristica flux-curent a bobinei sau <u>caracteristică de magnetizare a bobinei</u> (vezi capitolul 4).

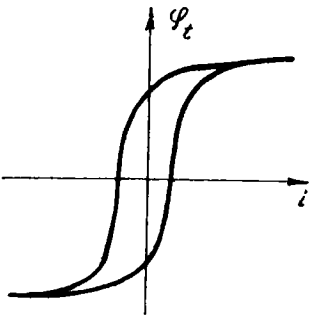


Fig. 7.10. Caracteristica de magnetizare a bobinei.

Se observă că pentru o bobină cu miez de fier, în regim alternativ, caracteristica de magnetizare este o curbă închisă. De aceea se mai numeşte şi ciclu de magnetizare.

Dacă bobina nu are miez feromagnetic, caracteristica este o dreaptă a cărei pantă este inductivitatea L a bobinei deoarece

$$\varphi_t = L\, i\,.$$

Pentru circuitul din fig. 7.9 se scrie cu ajutorul teoremei a doua a lui Kirchhoff că

$$u = r\, i + u_L$$

în care produsul r i este căderea de tensiune pe rezistenţa bobinei r iar u_L căderea de tensiune inductivă.

Dacă tensiunea la borne este sinusoidală

$$u = U\sqrt{2}\ \sin \omega t$$

şi se neglijează căderea de tensiune pe rezistenţa bobinei, atunci tensiunea u_L va fi sinusoidală:

$$u_L = U_L\ \sqrt{2}\ \sin \omega t$$

Dar tensiunea u_L este creată de variaţia în timp a fluxului φ_t. Prin urmare şi acesta va avea o variaţie sinusoidală. Se demonstrează că:

$$\varphi_t = N\varphi_f = \frac{U_L\sqrt{2}}{\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \Phi_{max} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (7.6)$$

şi fluxul util maxim este

$$\Phi_{max} = \frac{U_L\sqrt{2}}{2\pi f} = \frac{U_L}{4,44\ f} \quad (7.7)$$

iar fluxul fascicular maxim,

$$\Phi_{fmax} = \frac{U_L}{4,44\ fN} \quad . \quad (7.8)$$

In fig. 7.11 s-a reprezentat variaţia în timp a tensiunii u_L care se poate considera ca fiind tensiunea de la bornele bobinei dacă se neglijează căderea de tensiune pe rezistenţa bobinei . S-a reprezentat în fig. 7.11 variaţia în timp a fluxului total φ_t. Forma sinusoidală a acestui flux φ_t este determinată de forma tensiunii u_L ca urmare a legii inducţiei electromagnetice. Folosind ciclul de magnetizare se poate determina printr-o construcţie grafică punct cu punct curba curentului în funcţie de timp.

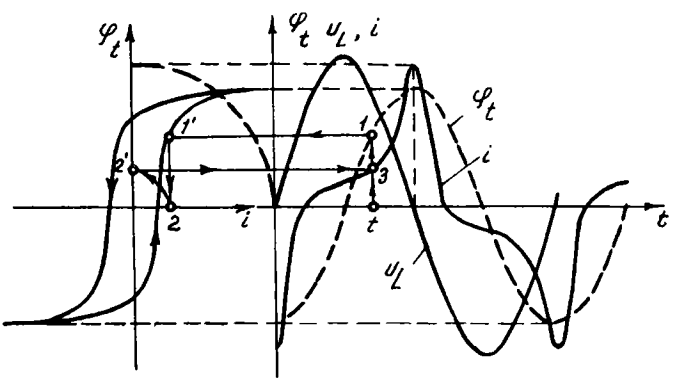


Fig. 7.11. Variaţia în timp a tensiunii u_L, fluxului total φ_t şi curentului i prin bobina cu miez feromagnetic.

Se procedează în modul următor; pentru un moment t oarecare, se deduce din curba sinusoidală, fluxul φ_t corespunzător (punctul 1). Corespunzător acestei valori, se deduce din ciclul de magnetizare valoarea lui i (punctul 2).

Se transpune valoarea lui i (punctul 2) pe axa ordonatelor (punctul 2'). Dar această mărime reprezintă valoarea curentului i la momentul t (punctul 3). Se procedează asemănător pentru alte momente.

Observaţii . 1. Din cauza fenomenului de saturaţie, curentul este puternic deformat, prezentînd un maxim ascuţit.

2. Din cauza ciclului de magnetizare, curentul trece prin zero (valori crescătoare) înaintea fluxului pe care îl produce.

7.5. Condensatorul neliniar

Permitivitatea dielectricilor folosiţi în condensatoarele obişnuite: mica, hîrtie, stiroflex etc., este constantă şi nu depinde de intensitatea cîmpului electric. Dielectricul feroelectric nu mai are permitivitatea constantă, aceasta depinde de intensitatea cîmpului electric stabilit între armăturile condensatorului. Consecinţa este că sarcina electrică variază neliniar în raport cu tensiunea aplicată la bornele condensatorului (Fig.7.12.

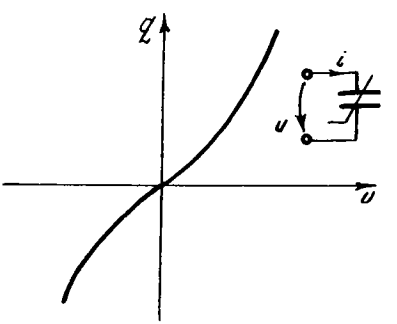


Fig. 7.12. Caracteristica sarcină-tensiune la condensatorul neliniar.

Condensatoarele care folosesc un dielectric cu o caracteristică neliniară se numesc condensatoare neliniare sau varicap (condensatoare cu capacitate variabilă).

Dacă tensiunea la bornele condensatorului are o variaţie sinusoidală de forma:

$$u = U\sqrt{2}\ \sin\omega t$$

atunci sarcina electrică va avea o variaţie în timp care se poate determina pe cale grafică.

In fig. 7.13 se construieşte punct cu punct variaţia sarcinii electrice în funcţie de timp după caracteristica sarcină-tensiune şi după graficul alternanţei pozitive a tensiunii sinusoidale.

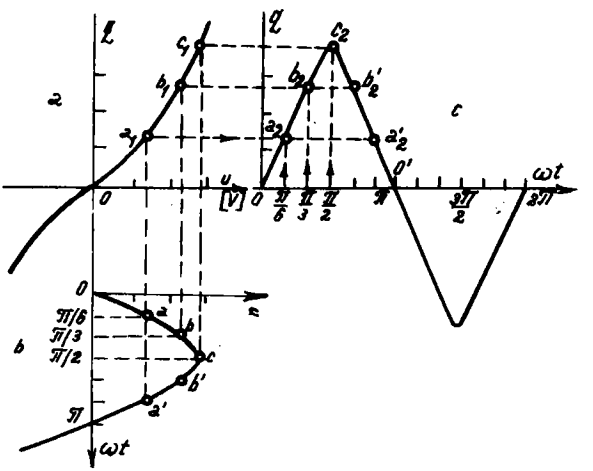


Fig. 7.13. Variaţia sarcinii electrice q şi a tensiunii u în funcţie de timp la condensatorul variabil.

Pentru reprezentarea tensiunii din fig. 7.13 a şi b s-a folosit aceeaşi scară.

In graficul din fig. 7.13 c, este reprezentată sarcina electrică la aceiaşi scară ca în caracteristica sarcină-tensiune (fig. 7.13 b). Axa ωt s-a reprezentat în prelungirea axei u.

S-a procedat astfel:

S-au ales valori pentru t egale cu $\frac{T}{12}$, $\frac{T}{6}$, $\frac{T}{4}$, respectiv pentru ωt egale cu $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$.

S-au determinat valorile instantanee corespunzătoare ale tensiunii de la bornele condensatorului (abscisele punctelor a,b,c). Valorile respective ale tensiunilor sînt transpuse în caracteristica sarcină-tensiune (punctele a_1, b_1,c_1) din fig. 7.13 a. Ordonatelor punctelor a_1, b_1, c_1 le corespund în fig. 7.13 c, punctele a_2, b_2, c_2.

Aceste puncte sînt valorile instantanee a sarcinii electrice q de pe armăturile condensatorului pentru valorile lui ωt egale cu $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$ şi $\frac{\pi}{2}$.

Se construieşte astfel în fig. 7.13 c porţiunea de grafic $Oa_2b_2c_2$ şi $c_2b'_2a'_2O'$.

Caracteristica sarcină-tensiune este simetrică în raport cu originea axelor ceea ce determină ca alternanţa negativă din graficul sarcină-timp să fie simetrica alternanţei pozitive.

OBSERVATIE:

Un condensator neliniar poate fi utilizat într-un circuit de curent alternativ pentru a schimba un semnal de formă sinusoidală (în acest caz tensiunea), într-un semnal de formă nesinusoidală (în acest caz sarcina electrică)

CAPITOLUL 8

SCHEME ECHIVALENTE A ELEMENTELOR NELINIARE PENTRU SEMNAL MIC

Curentul electric constant în timp I_A printr-un element neliniar (de exemplu printr-o diodă semiconductoare) se deduce din caracteristica volt-amper (fig. 8.1 a) şi este determinat de tensiunea constantă în timp U_A, aplicată la bornele acestui element neliniar. Punctul de pe caracteristică de coordonate U_A şi I_A se numeşte punct static de funcţionare (prescurtat PSF).

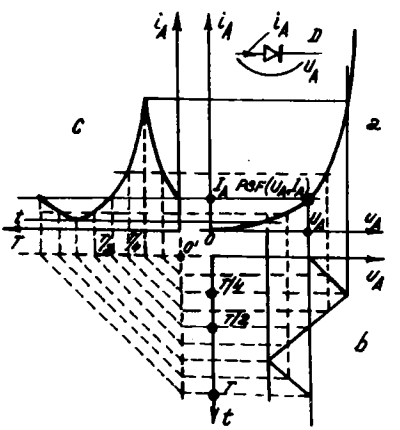


Fig. 8.1. Caracteristica volt-amper a diodei (a). Variaţia tensiunii u_A(b).Variaţia curentului i_A (c).

Presupunem că tensiunea la bornele diodei semiconductoare variază în timp cu frecvenţă joasă în jurul PSF, conform fig. 8.1 b. Vom nota această tensiune variabilă în timp cu u_A.

Curentul electric i_A, corespunzător tensiunii u_A, va fi un curent variabil în timp; variaţia în timp este redată în fig. 8.1 c.

Graficul de variaţie în timp a curentului i_A s-a construit punct cu punct, în funcţie de tensiunea variabilă în timp u_A de la bornele elementului neliniar, folosindu-se caracteristica volt-amper neliniară $i_A = f(u_A)$ din fig. 8.1 a.

Se observă că variaţia în timp a curentului electric i_A (fig. 8.1 c) prin dioda semiconductoare nu este asemenea cu variaţia tensiunii u_A. Curentul este distorsionat, această distorsionare sau deformare, fiind provocată de caracteristica neliniară a elementului semiconductor.

Dacă tensiunea u_A are variaţii mici în jurul PSF, atunci curentul i_A are de asemenea variaţii mici iar forma de variaţie va fi foarte asemănătoare cu a tensiunii u_A.

Prin urmare, cînd variaţiile tensiunii u_A sînt mici, se poate aproxima caracteristica volt-amper în jurul PSF prin tangenta dusă la caracteristică în punctul PSF (fig. 8.2 a).

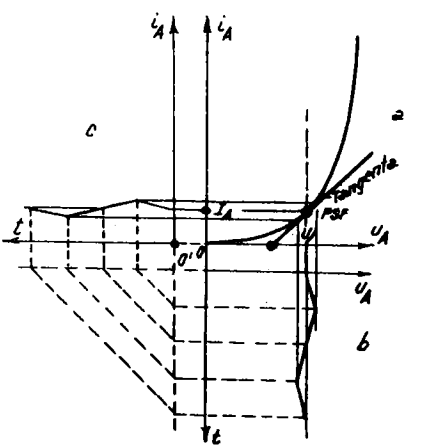


Fig. 8.2. Liniarizarea caracteristicii diodei (a). Variaţia tensiunii u_A(b). Variaţia curentului i_A (c).

Deci, pentru variaţii mici şi frecvenţă joasă a tensiunii la bornele unui element neliniar, caracteristica de funcţionare în PSF se poate înlocui printr-o dreaptă, tangenta în PSF.

Altfel exprimat, caracteristica neliniară s-a echivalat printr-o caracteristică liniară ceea ce este identic cu echivalarea elementului neliniar printr-un element liniar.

Din fig. 8.2 b şi c, se remarcă asemănarea dintre variaţia în timp a tensiunii u_A şi a curentului i_A prin elementul liniarizat.

In concluzie, pentru variaţii mici şi joasă frecvenţă a tensiunii electrice (semnal mic), elementele neliniare se pot înlocui prin elemente liniare.

Schemele electrice în care s-au înlocuit elementele neliniare cu elemente liniare, se numesc scheme electrice echivalente.

Se vor prezenta în continuare schemele electrice echivalente pentru două elemente neliniare, foarte utilizate în aplicaţiile practice, dioda semiconductoare şi tranzistorul bipolar.

8.1. Schema echivalentă a diodei pentru semnal mic şi joasă frecvenţă

Se va studia funcţionarea circuitului electric din fig. 8.3 (a) care conţine ca element neliniar dioda semiconductoare D.

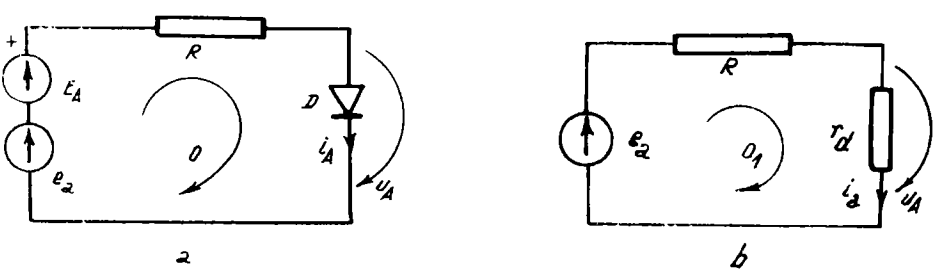


Fig. 8.3. Circuitul electric cu diodă (a) şi circuitul echivalent (b).

Pentru fixarea punctului static de funcţionare PSF, s-a introdus în circuit sursa de tensiune electromotoare continuă E_A

Semnalul mic este produs de sursa de tensiune electromotoare alternativa e_a, a cărei expresie este:

$$e_a = 14,1\sqrt{2}\ \sin\frac{2\pi}{T}\ t \quad (mV)$$

iar reprezentarea grafică este în fig. 8.4 b.

Cînd sursa e_a lipseşte din circuit, dioda D funcţionează în PSF fixat de sursa de tensiune continuă $E_A = 0,7$ V şi de rezistenţa de sarcină $R_A = 11,1\ \Omega$.

Coordonatele PSF se determină prin rezolvarea grafică a sistemului de ecuaţii:

$$\begin{aligned} E_A &= Ri_A + u_A \\ i_A &= f(u_A) \end{aligned} \qquad (8.1)$$

în care prima ecuaţie s-a obţinut scriind teorema a doua a lui Kirchhoff pe ochiul o în lipsa sursei e_a (fig. 8.3 a), iar cea de a doua este ecuaţia caracteristicii diodei din fig. 8.4 a.

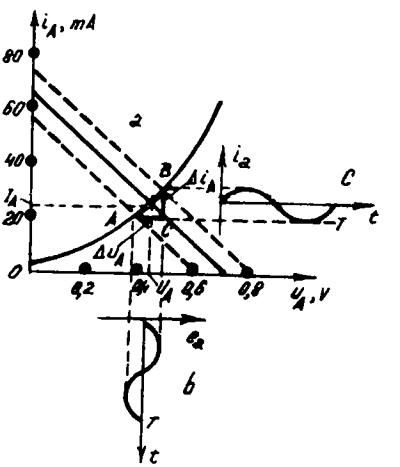


Fig. 8.4. Caracteristica diodei (a). Variaţia tensiunii e_a (b). Variaţia corespunzătoare a curentului i_a(c).

La intersecţia dreptei de sarcină cu graficul caracteristicii diodei se obţine:

$$U_A = 0,43 \text{ V} \quad \text{şi} \quad I_A = 24 \text{ mA} .$$

Rezistenţa statică a diodei în PSF este

$$R_s^{\bullet} = \frac{U_A}{I_A} = \frac{0,43 \text{ V}}{24 \text{ mA}} = \frac{0,43 \text{ V}}{0,024 \text{ A}} = 18 \ \Omega \quad (8.2)$$

Regimul dinamic al circuitului electric din fig. 8.3 a se caracterizează prin funcţionarea sursei de semnal mic e_a.

Teorema a doua a lui Kirchhoff aplicată pe ochiul o se scrie astfel:

$$E_A + e_a = Ri_A + u_A . \quad (8.3)$$

La bornele diodei D, va apare un semnal mic provocat de sursa e_a.

Se notează tensiunea anodică a semnalului mic de la bornele diodei D cu u_A.

Tensiunea anodică se scrie în acest caz, astfel:

$$u_A = U_A + \Delta u_A . \quad (8.4)$$

Semnalul mic Δu_A variază sinusoidal în timp cu frecvenţa tensiunii de semnal mic e_a:

$$\Delta u_A = \Delta U_A \sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{T} t .$$

Curentul anodic, corespunzător tensiunii u_A, este

$$i_A = I_A + \Delta i_A \qquad (8.5)$$

în care, Δi_A este variaţia curentului anodic faţă de valoarea din PSF, egală cu I_A.

Rezistenţa dinamică din PSF a diodei se defineşte din triunghiul ABC:

$$r_d = \frac{\Delta u_A}{\Delta i_A} \qquad (8.6)$$

Dacă se introduce Δi_A din această relaţie, i_A din (8.5) şi u_A din (8.4) în ecuaţia (8.3) se obţine:

$$E_A + e_a = RI_A + R\,\Delta i_A + U_A + \Delta u_A \qquad (8.7)$$

Dar:

$$\Delta u_A = r_d\,\Delta i_A$$

şi

$$E_A = RI_A + U_A \qquad (8.8)$$

(ecuaţia valabilă în PSF)

Prin înlocuire şi reducerea termenilor, se obţine o relaţie între variaţiile tensiunii şi curentului:

$$e_a = R\,\Delta i_A + r_d\,\Delta i_A \qquad (8.9)$$

Dacă se introduc următoarele notaţii:

$$\Delta i_A = i_a \quad \text{şi} \quad \Delta u_A = u_a \tag{8.10}$$

se obţine

$$e_a = Ri_a + r_d i_a \tag{8.11}$$

Această ecuaţie sugerează circuitul echivalent din fig. 8.3 b care se obţine în modul următor:

- Se înlocuieşte dioda semiconductoare prin rezistenţa dinamică r_d calculată în PSF; noua schemă obţinută reprezintă schema echivalentă a diodei pentru semnal mic şi joasă frecvenţă;

- Se suprimă din circuit sursa de alimentare în curent continuu.

Calculul circuitului echivalent din fig. 8.3 b

Rezistenţa dinamică r_d se determină grafic din triunghiul ABC (fig. 8.4 a).

$$r_d = \left.\frac{\Delta u_A}{\Delta i_A}\right|_{PSF} = \frac{(0,48 - 0,39)\ V}{(0,28 - 0,21)\ mA} = 1,25\ k\Omega \tag{8.12}$$

Curentul anodic i_a. Acesta constituie componenta alternativă a curentului anodic.

Aplicînd teorema a doua a lui Kirchhoff pe ochiul o_1 al circuitului echivalent din fig. 8.3 b, se obţine:

$$i_a = \frac{e_a}{R + r_d} = \frac{14,1\sqrt{2}\ \sin\frac{2\pi}{T}t}{11,1 + 1\ 250} \approx 11,1\sqrt{2}\ \sin\frac{2\pi}{T}t\ (\mu A)$$

adică un curent cu valoarea efectivă $I_a = 11,1\ \mu A$, în fază cu semnalul aplicat. Variaţia în timp a lui i_a este prezentată în fig. 8.4 c.

Precizări:

S-au folosit notaţiile următoare:

I_A, U_A - mărimi constante în timp, coordonatele PSF;

i_a, u_a - variaţiile curentului şi tensiunii la bornele diodei semiconductoare;

$$i_a = I_a \sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{T} t$$

$$u_a = U_a \sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{T} t \qquad (8.13)$$

în care I_a şi U_a sînt valorile efective ale acestor variaţii;

i_A, u_A - suma dintre mărimile de curent continuu din PSF şi variaţiile lor în regim dinamic;

$$i_A = I_A + \Delta i_A = I_A + i_a$$

$$u_A = U_A + \Delta u_A = U_A + u_a ; \qquad (8.14)$$

E_A - tensiunea electromotoare a sursei de curent continuu pentru fixarea PSF;

e_a - tensiunea electromotoare a sursei de semnal de valoare efectivă E_a, adică

$$e_a = E_a \sqrt{2} \sin \frac{2\pi}{T} t = E_a \sqrt{2} \sin \omega t.$$

8.2. Schema echivalentă a tranzistorului pentru semnal mic şi joasă frecvenţă

Tranzistorul este un element de circuit comandat cu mai multe borne de acces.

Se numeşte element de circuit comandat, elementul de circuit pentru care mărimile electrice (tensiune, curent) definite pentru anumite borne, depind de mărimile electrice definite pentru alte borne.

Tranzistorul bipolar este un dispozitiv semiconductor bipolar (cu conducţie prin electroni şi prin goluri) cu trei borne de acces (terminale). In fig. 8.5 a este prezentat tranzistorul PNP iar în fig. 8.5 b, tranzistorul NPN.

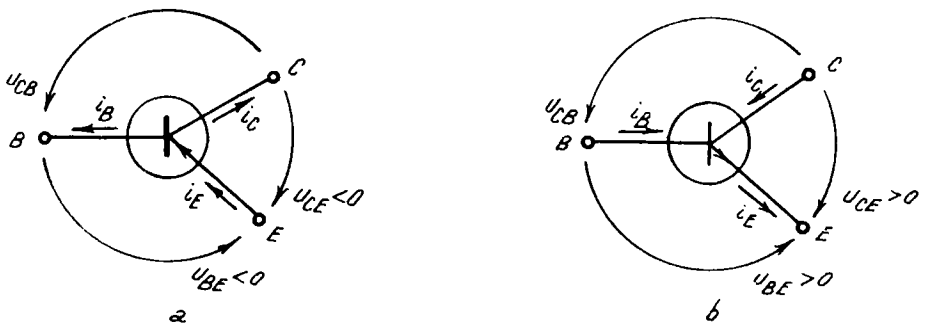


Fig. 8.5. Tranzistorul PNP (a) şi tranzistorul NPN (b).

Bornele de acces au următoarele denumiri:

Borna B - bază, borna C - colector şi borna E - emitor.

Tensiunile dintre borne au următoarele denumiri:

u_{CE} - tensiunea colector-emitor;

u_{BE} - tensiunea bază-emitor;

u_{CB} - tensiunea colector-bază;

Iar curenţii se numesc astfel:

i_B - curentul bază;

i_C - curentul colector;

i_E - curentul emitor.

Curenţii prin bornele unui tranzistor satisfac relaţia:

$$i_E = i_B + i_C . \qquad (8.15)$$

Curentul de colector depinde de curentul de bază; cu cît este mai mare curentul de bază cu atît mai mare este curentul de colector:

$$i_C = \beta\, i_B \qquad (8.16)$$

în care β este factorul de amplificare al curentului de bază. Această dependenţă dintre curentul de colector şi curentul de bază permite tranzistorului să funcţioneze în regim de amplificare.

Cînd tranzistorul funcţionează ca amplificator, semnalul de intrare se aplică între două dintre cele trei terminale.

Semnalul de ieşire se va obţine între două din cele trei terminale astfel că unul dintre terminale este comun.

In fig. 8.6 a, b, c s-au prezentat conexiunile tranzistorului NPN.

a. emitor comun;

b. bază comună;

c. colector comun.

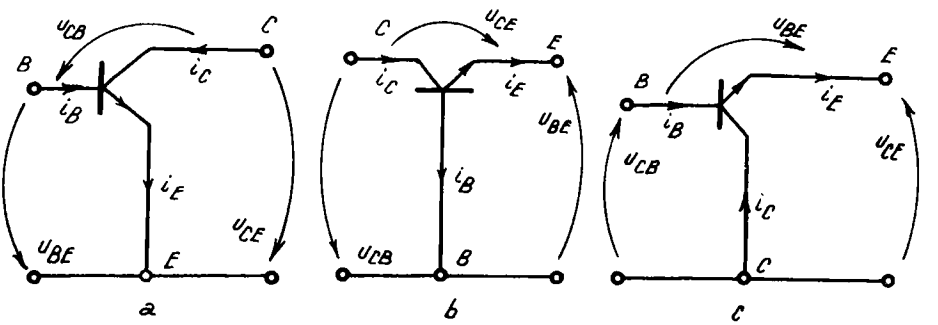


Fig. 8.6. Conexiunile tranzistorului NPN: a - emitor comun; b - bază comună; c - colector comun.

Pentru funcţionarea ca amplificator, se foloseşte conexiunea emitor comun.

Regimul static de funcţionare pentru tranzistorul bipolar NPN, conexiunea emitor comun, este fixat de curenţii i_E, i_B, i_C respectiv tensiunile u_{CE}, u_{BE} şi u_{CB} (fig. 8.6 a).

Legătura între curenţi este stabilită de teorema întîi a lui Kirchhoff:

$$i_E = i_B + i_C$$

iar tensiunile satisfac teorema a doua a lui Kirchhoff:

$$u_{CB} + u_{BE} - u_{CE} = 0$$

In fig. 8.7 s-au reprezentat familiile de caracteristici statice pentru tranzistorul bipolar NPN conexiunea emitor-comun.

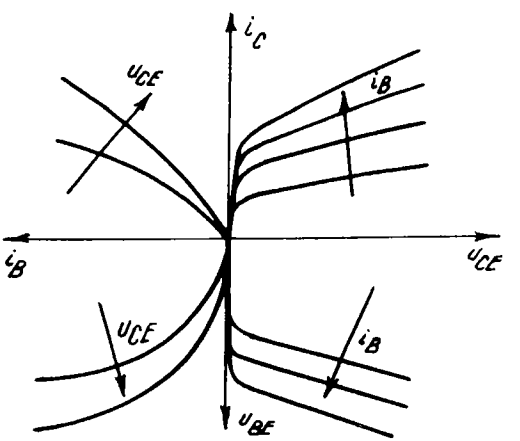


Fig. 8.7. Caracteristicile statice pentru tranzistorul bipolar NPN - emitor comun.

In regim dinamic de funcţionare, relaţiile dintre tensiunile variabile în timp şi curenţi de asemenea variabili în timp vor fi în general neliniare pentru că tranzistorul este un element neliniar. In anumite condiţii, relaţiile se pot liniariza. Aceste condiţii sînt îndeplinite pentru semnal mic şi joasă frecvenţă. Liniarizarea relaţiilor dintre tensiunile şi curenţii de joasă frecvenţă

şi amplitudine mică (semnal mic) creează posibilitatea înlocuirii tranzistorului bipolar printr-o schemă echivalentă. Procedeul de înlocuire se aseamănă cu procedeul de la dioda semiconductoare.

Se consideră funcţionarea tranzistorului într-o schemă de amplificator (fig. 8.8). Pentru fixarea PSF, se utilizează două surse de curent continuu: F_B şi E_c.

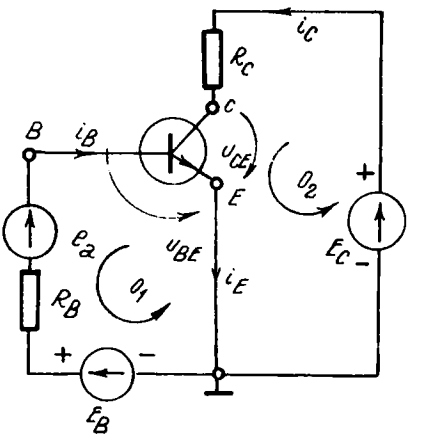


Fig. 8.8. Schemă de amplificare cu tranzistor NPN.

S-a plasat în circuitul de polarizare a bazei, sursa de semnal mic cu tensiune electromotoare:

$$e_a = E_a\sqrt{2}\ \sin\omega t\ .$$

Dacă lipseşte această sursă, atunci tranzistorul are un regim static de funcţionare impus de tensiunile electromotoare E_B şi E_C şi de rezistenţele R_B şi R_C.

Curenţii şi tensiunile pentru PSF se notează cu:

$$I_B,\ I_C,\ U_{CE} \text{ şi } U_{BE}\ .$$

In prezenţa sursei de semnal alternativ sinusoidal e_a, valorile curenţilor şi tensiunilor din PSF se modifică.

Noul regim de funcţionare se numeşte regim dinamic iar curenţii şi tensiunile din acest regim se prezintă sub forma:

$$i_B = I_B + i_b$$

$$i_C = I_C + i_c \qquad (8.17)$$

$$u_{CE} = U_{CE} + u_{ce}$$

$$u_{BE} = U_{BE} + u_{be}$$

Aici mărimile i_b, i_c, u_{ce} şi u_{be} reprezintă variaţiile faţă de valorile caracteristice ale PSF (punctul P din fig. 8.9 c).

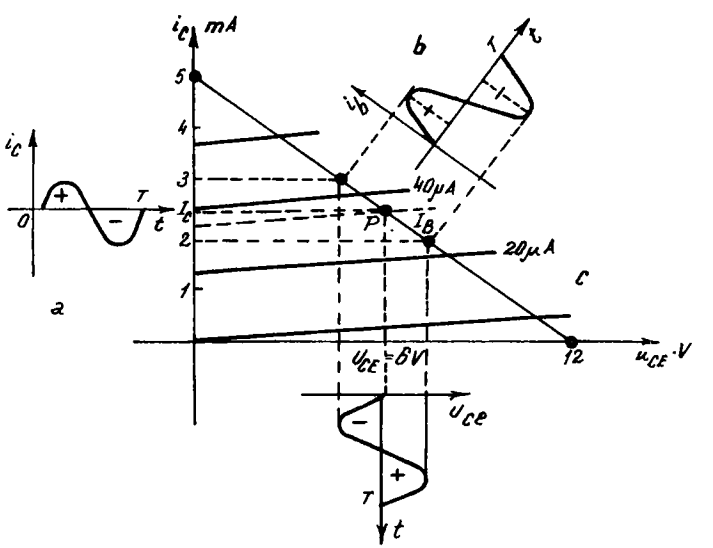


Fig. 8.9. a. Variaţia curentului i_c; b. Variaţia curentului i_b; c. Variaţia tensiunii u_{ce}.

Mărimile i_b, i_c, u_{ce} şi u_{be} variază sinusoidal în timp avînd frecvenţa egală cu frecvenţa semnalului. De asemenea, aceste mărimi reprezintă mici variaţii (pe care le vom nota cu Δ) ale curenţilor şi tensiunilor i_B, i_C, u_{CE} şi u_{BE}. Se scriu astfel:

$$i_b = \Delta i_B \; ; \; i_c = \Delta i_C \; ; \; u_{ce} = \Delta u_{CE} \text{ şi } u_{be} = \Delta u_{BE}$$

Cu aceste notaţii, relaţiile (8.17) se scriu:

$$\begin{aligned} \Delta i_B &= i_B - I_B \\ \Delta i_C &= i_C - I_C \\ \Delta u_{CE} &= u_{CE} - U_{CE} \\ \Delta u_{BE} &= u_{BE} - U_{BE} \, . \end{aligned} \tag{8.18}$$

Din fig. 8.9 se observă că mărimile i_c şi i_b sînt în fază cu t.e.m. e_a iar u_{ce} (variaţia tensiunii de colector) este defazată cu π radiani faţă de această t.e.m.

Dacă aplicăm teoremele lui Kirchhoff circuitul de amplificare din fig. 8.8 rezultă:

$$\begin{aligned} i_E &= i_C + i_B \\ e_a + E_B &= R_B \, i_B + u_{BE} \quad \text{(pe ochiul } o_1\text{)} \\ E_C &= R_C \, i_C + u_{CE} \quad \text{(pe ochiul } o_2\text{)} \end{aligned} \tag{8.19}$$

Dacă se înlocuiesc curenţii şi tensiunile cu expresiile:

$$i_E = I_E + i_e \; ; \; i_B = I_B + i_b \; ; \; i_C = I_C + i_c \; ; \; u_{BE} = U_{BE} + u_{be} \text{ şi } u_{CE} = U_{CE} + u_{ce}$$

rezultă:

$$\begin{aligned} I_E + i_e &= I_C + i_c + I_B + i_b \\ e_a + E_B &= R_B I_B + R_B i_b + U_{BE} + u_{be} \\ E_C &= R_C I_C + R_C i_c + U_{CE} + u_{ce} \end{aligned} \qquad (8.20)$$

Dar în regim static de funcţionare (PSF), prin aplicarea teoremelor lui Kirchhoff, se obţin ecuaţiile de funcţionare:

$$\begin{aligned} I_E &= I_C + I_B \\ E_B &= R_B I_B + U_{BE} \\ E_C &= R_C I_C + U_{CE} \end{aligned} \qquad (8.21)$$

Identificînd şi reducînd termenii în relaţiile (8.20) se obţin ecuaţiile pentru regimul dinamic şi semnal mic de joasă frecvenţă:

$$\begin{aligned} i_e &= i_c + i_b \\ e_a &= R_B i_b + u_{be} \\ 0 &= R_C i_c + u_{ce} \end{aligned} \qquad (8.22)$$

Aceste relaţii ne sugerează schema echivalentă din fig. 8.10. Se remarcă dispariţia surselor de curent continuu.

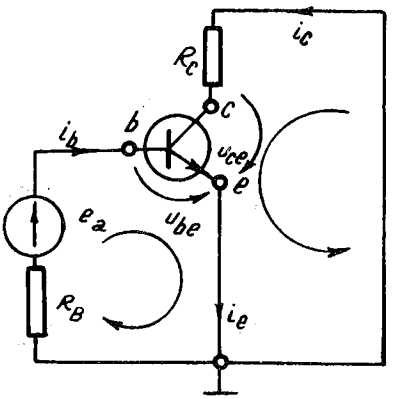


Fig. 8.10. Schema echivalentă a amplificatorului cu tranzistor NPN.

Dacă se consideră borna emitor e ca o bornă dublă, atunci schema pentru semnal mic şi joasă frecvenţă a tranzistorului bipolar se poate asimila cu un circuit cu patru borne de acces - denumit cuadripol - între mărimile de intrare şi ieşire existînd dependenţe liniare (fig. 8.11).

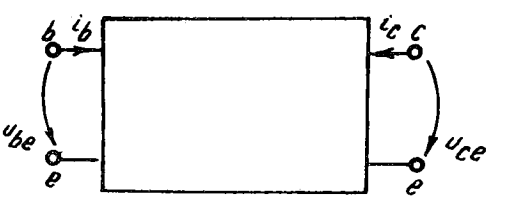


Fig. 8.11. Tranzistorul bipolar asimilat cu un cuadripol.

Aceste dependenţe liniare se scriu sub forma unui sistem de ecuaţii în care se folosesc parametrii hibrizi (notaţi cu "h"). Denumirea lor provine din faptul că natura lor nu este omogenă.

Variabilele independente în sistemul de ecuaţii cu parametrii "h" sînt tensiunea de intrare (în acest caz u_{be}) şi curentul de ieşire (în acest caz i_c)

Sistemul de ecuaţii este următorul:

$$\begin{aligned} u_{be} &= h_{11e}\, i_b + h_{12e}\, u_{ce} \\ i_c &= h_{21e}\, i_b + h_{22e}\, u_{ce} \end{aligned} \qquad (8.23)$$

Coeficienţii h_{11e}, h_{12e}, h_{21e} şi h_{22e} - parametrii hibrizi - se definesc astfel:

$$h_{11e} = \left.\frac{u_{be}}{i_b}\right|_{u_{ce}=0} = \left.\frac{\Delta u_{BE}}{\Delta i_B}\right|_{\Delta u_{CE}=0} = \left.\frac{\Delta u_{BE}}{\Delta i_B}\right|_{u_{CE}=\text{const.}} \qquad (8.24)$$

Se mai notează $h_{11e} = h_{ie}$.

Se numeşte impedanţă de intrare (input) cu bornele de ieşire c şi e scurtcircuitate; se măsoară în ohmi.

$$h_{12e} = \left.\frac{u_{be}}{u_{ce}}\right|_{i_b=0} = \left.\frac{\Delta u_{BE}}{\Delta u_{CE}}\right|_{\Delta i_B=0} = \left.\frac{\Delta u_{BE}}{\Delta u_{CE}}\right|_{i_B=\text{const.}} \qquad (8.25)$$

Se notează şi $h_{12e} = h_{re}$;

Se numeşte factor de transfer invers (reverse) sau reacţie în tensiune, cu intrare în gol; arată influenţa tensiunii de ieşire asupra tensiunii de intrare; este adimensional.

$$h_{21e} = \left.\frac{i_c}{i_b}\right|_{u_{ce}=0} = \left.\frac{\Delta i_C}{\Delta i_B}\right|_{\Delta u_{CE}=0} = \left.\frac{\Delta i_C}{\Delta i_B}\right|_{u_{CE}=\text{const}} \qquad (8.26)$$

Se notează şi $h_{21e} = h_{fe}$;

se numeşte factor de transfer direct (forward) sau amplificare în curent cu ieşirea în scurtcircuit; este adimensional.

$$h_{22e} = \left.\frac{i_c}{u_{ce}}\right|_{i_b=0} = \left.\frac{\Delta i_C}{\Delta u_{CE}}\right|_{\Delta i_B=0} = \left.\frac{\Delta i_C}{\Delta u_{CE}}\right|_{i_B=\text{const}} \qquad (8.27)$$

Se notează şi

se numeşte admitanţă de ieşire (output) cu intrare în gol; se măsoară în siemens (ohm^{-1}).

Indicele parametrilor "h" notat cu e arată modul de conexiune tranzistorului (emitor-comun).

In cea de a doua notaţie, primele litere a indicilor parametrilor "h" reprezintă iniţiala cuvîntului în limba engleză.

Din ecuaţiile (8.23) se poate construi schema echivalentă a tranzistorului NPN cu emitor comun (fig. 8.12).

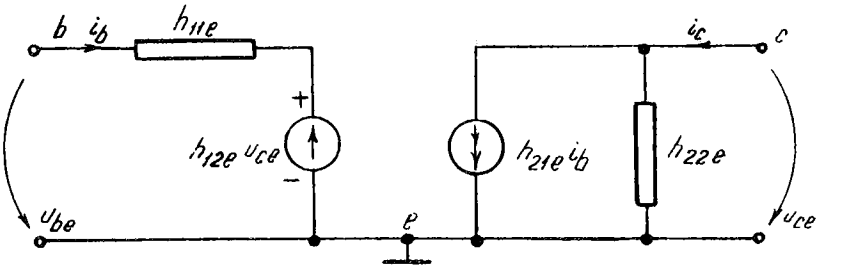


Fig. 8.12. Schema echivalentă cu parametrii "h" a tranzistorului NPN.

Inlocuind tranzistorul prin schema sa echivalentă cu parametrii h în fig. 8.10, se obţine schema echivalentă a amplificatorului pentru regimul dinamic la semnale mici (fig. 8.13).

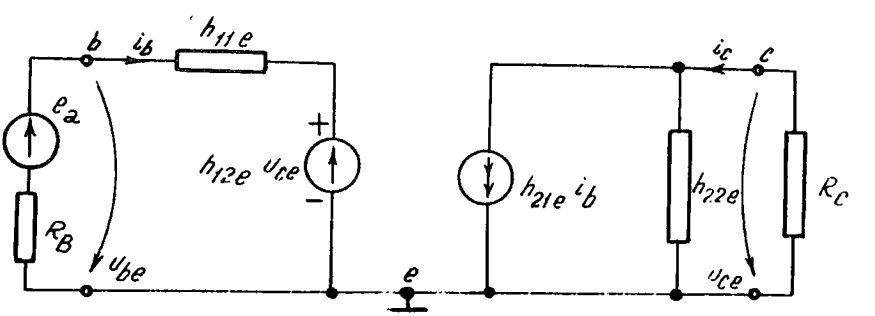


Fig. 8.13. Schema echivalentă a amplificatorului pentru semnale mici.

Această schemă liniarizată se calculează cu metode de rezolvare a circuitelor de curent continuu.

Metoda cea mai indicată este metoda potenţialelor la noduri.

Spre deosebire de circuitele de curent continuu la care se cerea determinarea curenţilor din laturi, cînd se cunoşteau tensiunile electromotoare, în cazul acestor scheme se cere determinarea altor mărimi. In cazul amplificatoarelor de joasă frecvenţă şi semnal mic cu tranzistor în conexiune emitor comun, mărimile sînt:

- amplificarea de tensiune;
- amplificarea de curent;
- rezistenţa de intrare;
- rezistenţa de ieşire.

Pentru amplificatorul studiat, aceste mărimi se definesc astfel:

- amplificarea de tensiune:

$$A_u = \frac{u_{ce}}{u_{be}} \tag{8.28}$$

- amplificarea de curent:

$$A_i = \frac{i_c}{i_b} \tag{8.29}$$

- rezistenţa de intrare:

$$R_{in} = \frac{u_{be}}{i_b} \tag{8.30}$$

- rezistenţa de ieşire:

$$R_e = \frac{u_{ce}}{i_c} . \tag{8.31}$$

CAPITOLUL 9

LINII ELECTRICE LUNGI

Elementele de circuit analizate sînt considerate ca elemente concentrate; rezistenţa electrică este concentrată în rezistorul ideal, inductivitatea în bobina ideală iar capacitatea în condensatorul ideal.

Circuitele electrice care se compun din elemente de circuit concentrate se numesc circuite electrice cu constante concentrate.

In realitate, nu există circuite cu elemente concentrate. De exemplu o bobină este caracterizată printr-o inductivitate şi o rezistenţă electrică; la frecvenţe înalte, capacităţile dintre diferitele spire ale bobinei nu se mai echivalează cu o capacitate între bornele bobinei.

Circuitele electrice în care rezistenţele, inductivităţile şi capacităţile electrice nu mai sînt concentrate - cînd fiecare porţiune mică a circuitului este caracterizată printr-o rezistenţă, inductivitate, capacitate - se numesc circuite cu constante repartizate.

Studiul circuitelor cu constante repartizate nu se mai face cu metode cunoscute, nu se identifică noduri, laturi sau ochiuri. De asemenea, teoremele lui Kirchhoff nu pot fi aplicate în forma lor cunoscută.

Circuitul electric nu mai are porţiuni neramificate în care curentul să fie constant. In cazul circuitelor electrice cu constante repartizate, din fiecare porţiune mică a circuitului se derivă curenţi către alte porţiuni ale circuitului.

O categorie importantă de circuite electrice cu constante repartizate, o formează liniile electrice lungi.

Se compun din două sau mai multe conductoare drepte, paralele, avînd secţiune uniformă, izolate între ele.

Fiecare mică porţiune din linia electrică lungă are o rezistenţă electrică, o inductivitate electrică.

Tot această mică porţiune de circuit are în raport cu porţiunea vecină o capacitate şi o conductanţă electrică.

Schema unei linii electrice lungi şi circuitul echivalent sînt prezentate în fig. 9.1 a şi b.

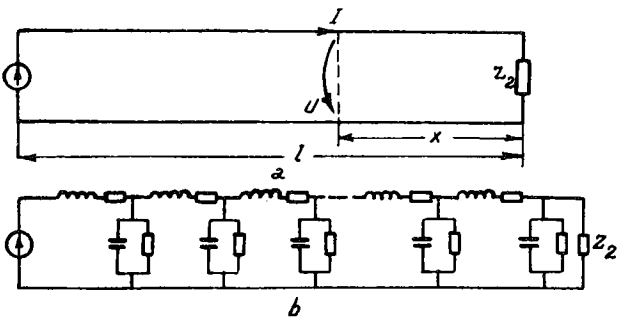


Fig. 9.1. Linie electrică lungă; a. Schemă; b. Circuit echivalent.

Prin urmare, în cazul liniilor electrice lungi, se pot introduce elemente noi de circuit: rezistenţa liniei pe unitatea de lungime, inductivitatea liniei pe unitatea de lungime, capacitatea liniei pe unitatea de lungime şi conductanţa liniei pe unitatea de lungime.

Dacă se consideră lungimea liniei egală cu l, atunci elementele de circuit repartizate vor fi

$$R_l = \frac{R}{l} \quad ; L_l = \frac{L}{l} \quad ; \quad C_l = \frac{C}{l} \quad \text{şi} \quad G_l = \frac{G}{l} \; .$$

9.1. Fenomene pe linii electrice lungi

Prin studiul liniilor electrice lungi, se urmăreşte:

- cunoaşterea repartizării curentului şi tensiunii în lungul liniei;
- cunoaşterea mărimilor caracteristice la bornele de intrare şi de ieşire ale liniei.

Metoda constă în determinarea într-un punct de pe linie a tensiunii şi curentului. Apoi prin metode matematice, care nu vor fi aplicate deoarece

depăşeşte nivelul de înţelegere, se calculează repartiţia curentului şi tensiunii în lungul liniei întregi, relaţiile între tensiuni şi curenţi la intrarea respectiv la ieşirea liniei electrice lungi. Se obţine astfel o caracterizare globală a liniei.

Studiul se simplifică dacă se consideră o linie lungă ideală, adică o linie cu rezistenţa R_l egală cu zero şi conductanţa G_l egală cu infinit; linia conţine numai capacitate şi inductivitate repartizată.

In practică, se pot întîlni astfel de linii; sînt liniile alimentate cu tensiuni de frecvenţe înalte la care rezistenţa şi conductanţa se pot neglija în raport cu impedanţa inductivă sau capacitivă.

In fig. 9.2 a este prezentată o linie electrică lungă ideală.

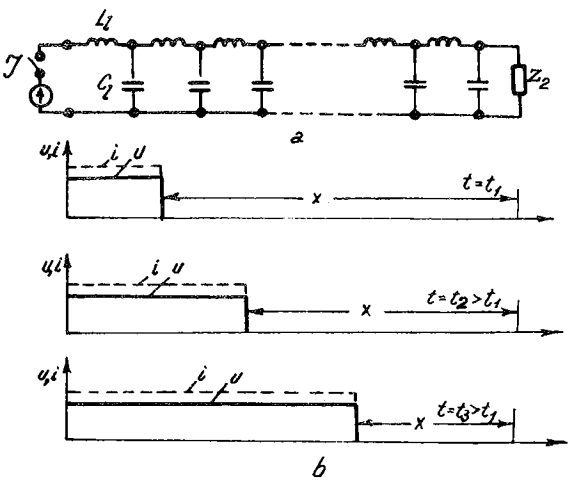


Fig. 9.2. Linia lungă ideală.

La momentul t = 0, se închide întreruptorul $\mathcal{J}$. Prima capacitate a primei porţiuni se încarcă prin inductivitatea bobinei echivalente. Incărcarea durează un timp care depinde de valorile lui L_l şi C_l. Treptat, se realizează încărcarea liniei dar evident după un interval de timp. In tot acest interval, tensiunea înaintează în lungul liniei. Se spune că apare un fenomen de propagare în lungul liniei (fig. 9.2 b).

Unda de tensiune înaintează pe linie cu o viteză finită care se numeşte viteză de propagare în lungul liniei. Viteza depinde de valorile elementelor de circuit distribuite L_l, C_l şi de mediul în care este plasată linia.Pentru mediu aer sau vid, se constată că această viteză este egală cu viteza luminii în vid.

Se constată că odată cu unda de tensiune se propagă şi o undă de curent deoarece încărcarea condensatoarelor se face printr-un curent care va străbate inductivităţile repartizate în lungul liniei.

Cînd unda ajunge la cap de liniei, este posibil să apară un fenomen de reflexie a undei.

Acest fenomen este posibil cînd energia transmisă de generator nu este absorbită integral de receptor.

Unda inversă care apare se propagă de la receptor către generator.

Prin urmare, pe o linie electrică lungă, pot apare două unde: undă directă şi unda inversă (reflectată). In fiecare punct al liniei,curentul şi tensiunea va reprezenta o suprapunere a undelor directă şi reflectată de curent respectiv de tensiune.

In cazul generatorului sinusoidal de alimentare a liniei, au loc fenomene asemănătoare. Capacităţile se încarcă şi se descarcă succesiv,tensiunea şi curentul avînd o viteză de propagare constantă în lungul liniei. Prin urmare, variaţia sinusoidală în timp a tensiunii şi curentului se păstrează dar apare un defazaj al tensiunii sau curentului dintr-un punct al liniei faţă de tensiunea sau curentul de la intrare. Adică, dacă ar fi posibil să se "vadă" tensiunea şi curentul în lungul liniei la un moment dat $t = t_1$, s-ar observa că tensiunea sau curentul la intrare trece prin maximum iar într-un punct depărtat de intrare aceste mărimi trec prin zero.

De asemenea, dacă ar fi posibil să se "vadă" tensiunea şi curentul sinusoidal în lungul liniei, s-ar observa că sinusoida se deplasează pe linie ca un "mobil". Adică există o variaţie sinusoidală în spaţiu. Există prin urmare o variaţie sinusoidală în timp şi o variaţie sinusoidală în spaţiu a tensiunii şi curentului în lungul liniei.

Această dublă dependenţă a curentului şi tensiunii de timp şi de lungime, este caracteristica circuitelor cu constante repartizate.

9.2. Linii electrice lungi cu pierderi

Fenomenele au acelaşi caracter ca în cazul liniilor electrice ideale dar spre deosebire, apare aici o "slăbire" a undelor denumită atenuare. Există în acest caz o pierdere de energie în lungul liniei.

9.3. Aplicaţie

O linie aeriană de telecomunicaţii de lungime l = 100 km (fig. 9.3) cu parametrii $R_l = 5,4\ \Omega/km$, $L_l = 2.10^{-3}$ H/km, $G_l = 1.10^{-6}\ \Omega^{-1}/km$ şi $C_l = 6.10^{-9}$ F/km alimentează la extremitatea sa o impedanţă egală cu impedanţa caracteristică (Z_C). Tensiunea la bornele impedanţei de sarcină este $u_2 = 10\sqrt{2}\sin\omega t$ (V) iar frecvenţa f = 800 Hz.

Să se calculeze valorile eficace şi instantanee ale tensiunii U_1, u_1 şi curentului I_1, i_1 la bornele de intrare ale liniei.

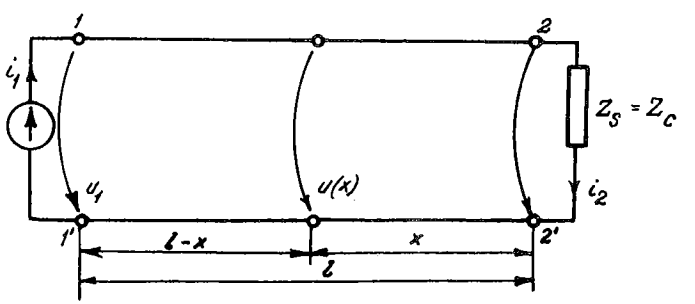


Fig. 9.3.

Rezolvare.

O linie electrică lungă este adaptată cînd impedanţa de sarcină este egală cu impedanţa caracteristică ($\underline{Z}_s = \underline{Z}_C$).

In acest caz. energia se transmite în lungul liniei în sensul de la sursă la receptor (undă directă). La bornele impedanţei de sarcină toată energia respectiv toată informaţia transmisă este captată de receptor fără reflexie.

In regimul - linie electrică adaptată ($\underline{Z}_s = \underline{Z}_C$) şi cu pierderi ($R_l \neq 0$ şi $G_l \neq \infty$) - tensiunea complexă într-un punct oarecare al liniei aflat la distanţa x de extremitatea sa este dată numai de unda directă (unda reflectată este zero).

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_d = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2\underline{Z}_C}{2} e^{\underline{\gamma}x} = \underline{U}_2 e^{\underline{\gamma}x} ,$$

deoarece

$$\underline{I}_2 \underline{Z}_C = \underline{U}_2$$

iar curentul direct

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_d = \frac{\underline{U}_d}{\underline{Z}_C} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} e^{\underline{\gamma}x} = \underline{I}_2 e^{\underline{\gamma}x}$$

în care:

$\underline{U}_2$ şi $\underline{I}_2$ sînt tensiunea şi curentul complex la extremitatea liniei;

$\underline{\gamma}$ - constanta de propagare (mărime complexă);

$\underline{Z}_C$ - impedanţa caracteristică a liniei.

In aceste două relaţii, nu sînt cunoscute:

- impedanţa caracteristică $\underline{Z}_C$;
- constanta de propagare $\underline{\gamma}$.

Aceste două mărimi se numesc parametrii secundari ai unei linii electrice lungi.

Calculul impedanţei caracteristice $\underline{Z}_C$. Impedanţa caracteristică sau impedanţa de undă a unei linii se calculează cu formula:

$$\underline{Z}_C = Z_C\, e^{j\theta} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}}$$

în care: Z_0 este impedanţa de linie pe kilometru şi egală cu

$$\underline{Z}_0 = R_l + j\omega L_l = 5,4 + j2\pi \cdot 800 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 5,4 + j10$$

şi $\underline{Y}_0$ este admitanţa de linie pe kilometru

$$\underline{Y}_0 = G_l + j\omega C_l = 10^{-6} + j2\pi \cdot 800 \cdot 6 \cdot 10^{-9} \cong 10^{-6}(1 + j30).$$

Rezultă

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{5,4 + j10}{10^{-6}\,(1 + j30)}} = 620\, e^{-j\,8^{o}10'}\,\Omega .$$

Calculul constantei de propagare $\underline{\gamma}$.

Constanta de propagare

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{\underline{Z}_0\,\underline{Y}_0}$$

în care:

α - constanta de atenuare;

β - constanta de fază.

Rezultă prin înlocuire

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(5,4 + j10)(1 + j30)\ 10^{-6}} = 4.8 \cdot 10^{-3} + j17,9 \cdot 10^{-3}$$

sau

$$\alpha = 4.8 \cdot 10^{-3} \text{ Np/km}$$

$$\beta = 17.9 \cdot 10^{-3} \text{ rad/km}$$

Calculul tensiunii şi curentului la începutul liniei. Tensiunea U_1. Din datele problemei se cunoaşte valoarea eficace a tensiunii $U_2 = 10$ V la extremitatea liniei. Faza iniţială este zero.

Prin urmare în complex

$$\underline{U}_2 = 10\, e^{j0^o} = 10 \text{ V}$$

Din relaţia

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_2\, e^{\gamma x} = 10\, e^{\alpha x}\, e^{j\beta x}$$

şi pentru $x = l$ în care caz

$$\underline{U}(x) = \underline{U}(l) = \underline{U}_1$$

vom avea

$$\underline{U}_1 = 10\, e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l}$$

în care

$$\alpha l = 4,8 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0,48 \text{ Np} \quad \text{şi} \quad e^{0,48} = 1,62$$

$$\beta l = 17,9 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 1,79 \text{ rad} \quad \text{sau} \quad \beta l = 102^o30' (1 \text{ rad} = 57^o30').$$

Tensiunea complexă $\underline{U}_1$ va fi

$$\underline{U}_1 = 16,2\ e^{j102^{\circ}30'} \quad (V)$$

iar valoarea instantanee

$$u_1 = 16,2\sqrt{2}\ \sin\ (\omega t + 102^{\circ}30')(V)$$

în care valoarea efectivă:

$$U_1 = 16,2\ V.$$

Curentul $\underline{I}_1$. Se calculează cu relaţia

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C}\ e^{\underline{\varphi}_1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_C}$$

deoarece

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2\ e^{\underline{\varphi}_1}.$$

Prin înlocuire se obţine:

- curentul complex

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_C} = \frac{16,2\ e^{j102^{\circ}30'}}{620\ e^{-j8^{\circ}10'}} = 26,2\ e^{j110^{\circ}40'} \quad (mA);$$

- valoarea instantanee

$$i_1 = 26,2\sqrt{2}\ \sin\ (\omega t + 110^{\circ}40')\ ;$$

- valoarea eficace

$$I_1 = 26,2 \text{ mA} .$$

Calculul curentului I_2 la extremitatea liniei.

Curentul la extremitatea liniei ($x = 0$) se calculează din relaţia:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} e^{\gamma 0} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} = \frac{10}{620\ e^{-j8^{o}10'}} = 16,1\ e^{j8^{o}10'} \text{ mA} ;$$

- valoarea instantanee

$$i_2 = 16,1\sqrt{2}\ \sin(\omega t + 8^{o}10') \text{ mA} ;$$

- valoarea eficace

$$I_2 = 16,1 \text{ mA} .$$

Defazajele dintre tensiuni şi curenţi. In cazul liniei electrice lungi adaptate, defazajul impedanţei de sarcină este egal cu defazajul impedanţei caracteristice şi cu cel al impedanţei de intrare deoarece:

$$\underline{Z}_{intr} = \underline{Z}_s = \underline{Z}_C = Z_C\ e^{j\theta} = 620\ e^{-j8^{o}10'} \Omega$$

Prin urmare, defazajul

$$\theta = -8^{o}10'.$$

Acelaşi defazaj trebuie să fie între tensiunea şi curentul de intrare $\underline{U}_1$ şi $\underline{I}_1$ respectiv între tensiunea şi curentul de ieşire $\underline{U}_2$ şi $\underline{I}_2$.

Verificare:

- defazajul dintre $\underline{U}_1$ şi $\underline{I}_1$

$$(\omega t + 102^{o}30') - (\omega t + 110^{o}40') = - 8^{o}10';$$

- defazajul dintre $\underline{U}_2$ şi $\underline{I}_2$

$$\omega t - (\omega t + 8^{o}10') = - 8^{o}10'.$$

Reprezentarea grafică a variaţiei tensiunii şi curentului (valori eficace) în lungul liniei.

Pentru reprezentarea grafică se înlocuiesc în expresiile:

$$U(x) = U_2 e^{\alpha x} = 10 e^{\alpha x}$$

şi

$$I(x) = \frac{U_2}{Z_C} e^{\alpha x} = 16,1 e^{\alpha x}$$

diverse valori ale lui x. Valorile obţinute se trec în tabelul 9.1.

Tabelul 9.1.

x km	0	25	50	75	100
αx, (Np)	0	0,12	0,24	0,36	0,48
$e^{\alpha x}$	1	1,13	1,27	1,43	1,62
U (V)	10	11,3	12,7	14,3	16,2
I (mA)	16,1	18,2	20,5	23,0	26,2

In baza acestor date s-a trasat graficul tensiunii şi curentului din fig. 9.4.

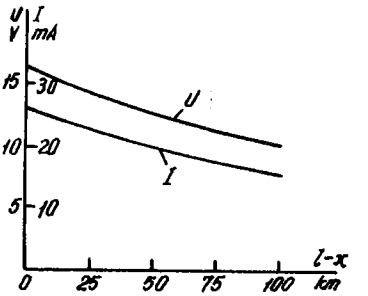


Fig. 9.4.

Din acest grafic se observă atenuarea undelor de tensiune şi curent în timpul propagării de la începutul liniei electrice lungi spre extremitatea sa.

Atenuarea tensiunii şi curentului pe linia electrică adaptată cu pierderi.

Din relaţiile scrise mai sus, rezultă că pentru x = l avem

$$U = U_1 \quad \text{şi} \quad I = I_1 .$$

Din rapoartele

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2} = e^{\alpha l} = e^{0,48} = 1,62 \ ;$$

Prin urmare, curentul şi tensiunea sînt atenuate în lungul liniei de 1,62 ori.

Exprimată în neperi, atenuarea tensiunii

$$a = \ell n \ \frac{U_1}{U_2} = \ell n \ 1,62 = \ell n \ e^{0,48} = 0,48 \ \text{Np}$$

care este aceiaşi pentru curent.

CAPITOLUL 10

UNDE ELECTROMAGNETICE

S-a arătat la studiul legii inducţiei electromagnetice că un cîmp magnetic variabil în timp $\bar{B}$ generează într-o spiră conductoare, tensiune electromotoare. Ca urmare, va apare un curent electric. La rîndul său, curentul respectiv purtătorii de sarcină electrică - electronii - în deplasarea lor dă naştere unui cîmp electric $\bar{E}$. Dar cîmpul electric $\bar{E}$ apare chiar şi în lipsa spirei prin care circulă curentul electric; el apare ori de cîte ori variază cîmpul magnetic (fig. 10.1). Cîmpul electric de inducţie are linii de cîmp închise şi este perpendicular pe cîmpul magnetic variabil care îl generează (fig. 10.2).

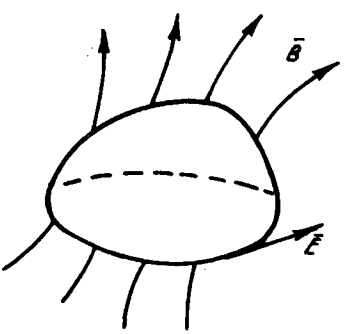


Fig. 10.1. Cîmpul electric $\bar{E}$ este generat de cîmpul magnetic variabil $\bar{B}$

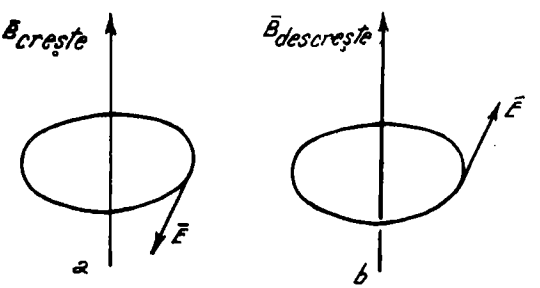


Fig. 10.2. Cîmpul electric $\bar{E}$ este perpendicular pe cîmpul magnetic $\bar{B}$.

Dacă cîmpul magnetic $\bar{B}$ este crescător, atunci cîmpul electric are un sens; cînd însă $\bar{B}$ este descrescător, atunci cîmpul electric $\bar{E}$ are sens schimbat (fig. 10.2 a şi b).

Prin urmare, orice cîmp magnetic variabil se înconjoară cu un cîmp electric cu linii de cîmp închise a cărui intensitate este cu atît mai mare, cu cît variaţia în timp a cîmpului magnetic este mai rapidă.

La rîndul său, cîmpul electric variabil în timp generează cîmp magnetic. S-a prezentat anterior că un curent electric care parcurge un conductor generează în domeniul din apropierea conductorului un cîmp magnetic. Dacă curentul electric este alternativ în timp, generează în jurul conductorului pe care îl străbate de asemenea un cîmp magnetic. Se ştie că într-un circuit electric simplu în care este plasat un condensator electric, curentul alternativ străbate circuitul electric, condensatorul electric comportîndu-se ca o reactanţă capacitivă a cărei valoare este cu atît mai mică cu cît frecvenţa curentului alternativ este mai mare. In acest circuit electric (fig. 10.3), există o deplasare de purtători de sarcină numai în conductoarele electrice; în condensatorul electric nu trec însă purtători de sarcină electrică pentru că între

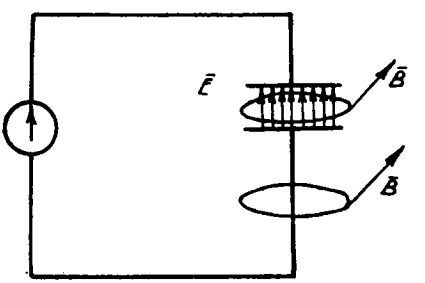


Fig. 10.3. Cîmpul magnetic $\bar{B}$ există între armăturile condensatorului C.

armături se află dielectricul. Intre armăturile condensatorului este prezent însă un cîmp electric $\bar{E}$ variabil în timp, alternativ. Se constată însă că avem cîmp magnetic în jurul conductoarelor unde circulă purtătorii de sarcină dar apare cîmp magnetic şi între armăturile condensatorului unde este prezent un cîmp electric variabil în timp.

Concluzia este că în porţiunea de circuit dintre plăcile condensatorului unde lipseşte un curent electric de conducţie, cîmpul electric variabil dintre armăturile condensatorului generează un cîmp magnetic.

Prin urmare, este adevărată şi reciproca: cîmpul electric variabil generează un cîmp magnetic.

De altfel, această ipoteză a fost emisă de James Clark Maxwell în 1865 care a afirmat că orice cîmp electric variabil se înconjoară cu un cîmp magnetic cu linii de cîmp închise a cărui intensitate este cu atît mai mare cu cît cîmpul electric variază mai rapid.

Cîmpul magnetic este perpendicular pe cîmpul electric variabil generator, sensul lui depinzînd de modul în care creşte sau descreşte cîmpul electric; dacă cîmpul electric $\bar{E}$ este crescător, atunci cîmpul magnetic $\bar{B}$ are un sens iar dacă cîmpul electric este descrescător atunci cîmpul magnetic are sens contrar (fig. 10.4 a şi b).

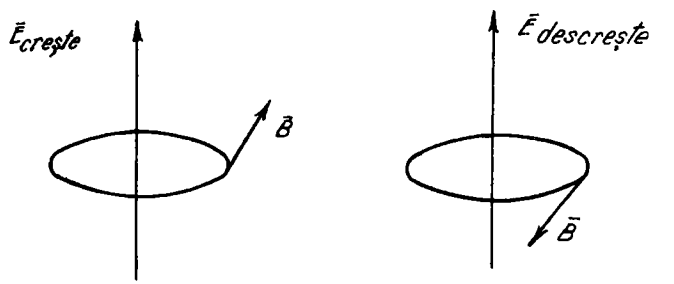


Fig. 10.4. Sensul cîmpului magnetic $\bar{B}$ depinde de variaţia cîmpului $\bar{E}$.

Aşadar, între cîmpul electric $\bar{E}$ şi cîmpul magnetic $\bar{B}$ există o legătură în sensul că unul din ele se generează prin variaţia celuilalt.

Sistemul de cîmpuri magnetic şi electric care oscilează şi se generează reciproc, se numeşte cîmp electromagnetic.

10.1. Propagarea cîmpului electromagnetic

O proprietate importantă a cîmpului electromagnetic cu largi aplicaţii în tehnică este că acesta se propagă în spaţiul înconjurător.

Să considerăm un cîmp electric periodic sinusoidal $\bar{E}_1$ care generează un cîmp magnetic periodic $\bar{B}_1$ (fig. 10.5). La rîndul său, cîmpul magnetic $\bar{B}_1$ - fiind **variabil** în timp - va genera în jurul său

un cîmp electric variabil $\bar{E}_2$. In acest proces de generare, cîmpul electric s-a propagat din a în b. La rîndul său, cîmpul $\bar{E}_2$ din punctul b va genera în jurul său un cîmp magnetic variabil în timp $\bar{B}_2$ care va genera un cîmp electric variabil în timp etc.

Prin urmare, se constată o propagare din aproape în aproape a acestui sistem de cîmpuri magnetic şi electric adică a cîmpului electromagnetic.

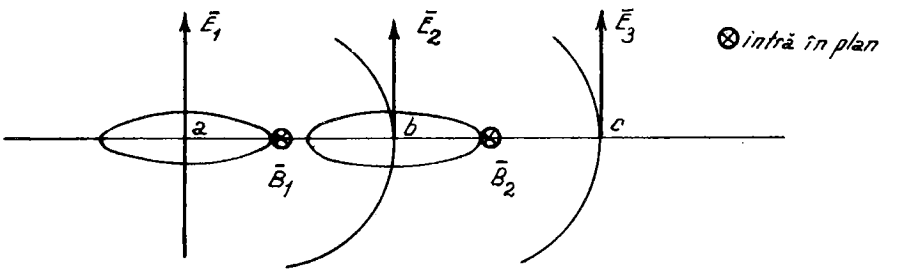


Fig. 10.5. Cîmpul electric $\bar{E}$ generează cîmpul magnetic $\bar{B}$ şi reciproc.

Forma de propagare a cîmpului electromagnetic care variază periodic, se numeşte undă electromagnetică.

Se constată deci că într-o undă electromagnetică cîmpul electric $\bar{E}$ şi cîmpul magnetic $\bar{B}$ oscilează în plane perpendiculare între ele şi perpendiculare pe viteza de propagare a undei notată cu $\bar{v}$ (fig. 10.6).

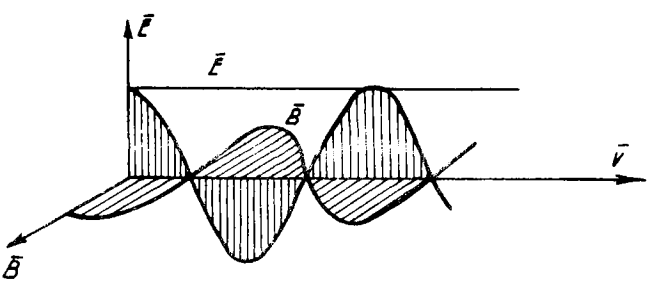


Fig. 10.6 Unda electromagnetică se propagă cu viteza $\bar{v}$.

Cele două cîmpuri, electric şi magnetic oscilează în fază şi trec în acelaşi timp prin maxime şi minime.

S-a demonstrat că viteza undelor electromagnetice în vid este

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}} \qquad (10.1)$$

în care

$$\varepsilon_o = \frac{1}{4\pi\ 9.10^4} \quad F/m$$

permitivitatea electrică a vidului şi

$$\mu_o = 4\pi . 10^{-7} \quad H/m$$

permeabilitatea magnetică a vidului.

Dacă se înlocuieşte, se obţine viteza undelor electromagnetice în vid:

$$c = 3 . 10^{-8} \quad m/s .$$

Valoarea vitezei undelor electromagnetice este egală cu viteza luminii în vid.

Intr-un mediu oarecare caracterizat prin permitivitatea relativă ε_r şi permeabilitatea relativă μ_r, viteza undelor electromagnetice este mai mică decît în vid şi este dată de relaţia

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} . \qquad (10.2)$$

10.2. Generarea undelor electromagnetice

Undele electromagnetice sînt generate cu ajutorul unui oscilator care se obţine dintr-un circuit oscilant prin deschiderea respectiv îndepărtarea una de alta a armăturilor condensatorului; s-a realizat un circuit **oscilant deschis** (fig. 10.7).

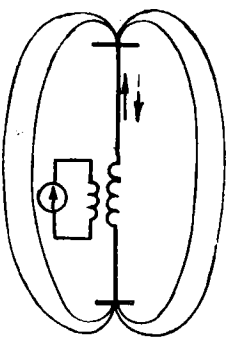


Fig. 10.7. Circuit oscilant deschis.

Un circuit oscilant deschis se poate constitui dintr-un fir conductor liniar în care se induce o tensiune electromotoare de înaltă frecvenţă şi care la rîndul său dă naştere unui curent de asemenea de frecvenţă foarte înaltă. Acest fir a căpătat denumirea de dipol electric (fig. 10.8). In cazul dipolului, capacitatea şi inductivitatea circuitului oscilant nu mai sînt concentrate,aceste

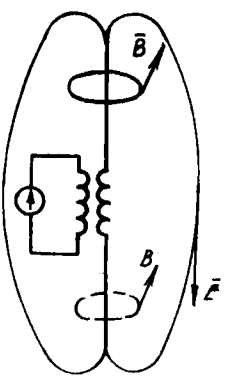


Fig. 10.8. Dipolul electric oscilant.

elemente de circuit vor fi repartizate (distribuite) în lungul dipolului electric. Totuşi, pentru generarea unei t.e.m. de frecvenţă înaltă, s-a prevăzut la mijlocul dipolului o bobină în care se induce această tensiune electromotoare.

In cazul circuitului oscilant deschis (dipolului electric) cîmpul electric nu mai este concentrat între armăturile condensatorului ca în cazul circuitului oscilant închis. Acesta se extinde la un domeniu mult mai mare din jurul dipolului.

La rîndul său, cîmpul magnetic generat de cîmpul electric se va extinde de asemenea la o zonă din spaţiu apărînd în acest mod în spaţiul din jurul dipolului electric un cîmp electromagnetic care va oscila periodic cu o frecvenţă egală cu a curentului electric din dipol.

Oscilaţiile cîmpului electromagnetic se propagă în spaţiu după modul în care s-a prezentat mai sus. Astfel, dipolul electric radiază în spaţiu unde electromagnetice. Dar cum în cîmpul electromagnetic este concentrată energie, rezultă că dipolul prin undele electromagnetice radiază energie în spaţiu.

BIBLIOGRAFIE

1. Andronescu Pl. - Bazele electrotehnicii. Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1972.

2. Cristea N şi colectiv. - Culegere de probleme de electrotehnică Bucureşti. Atelierul de multiplicare I.P.B., 1979.

3. Lunze Klaus - Einführung in die Electrotechnik. Berlin VEB Verlagtechnik, 1978.

4. Nemoianu C. şi Cristea N. - Electrotehnică. Bucureşti. Atelierul de multiplicare I.P.B., 1976.

5. Rădulet R. - Bazele teoretice ale electrotehnicii. Bucureşti. Litografia învăţămîntului, 1955-1956.

6. Sora C. - Bazele electrotehnicii. Bucureşti. Editura didactică şi pedagogică, 1982.

7. Timotin A şi colectiv. - Lecţii de bazele electrotehnicii. Bucureşti. Editura didactică şi pedagogică, 1964.

8. Tugulea A şi colectiv. - Electrotehnică. Bucureşti. Editura didactică şi pedagogică, 1982.

9. Zaitchik Y.M. - Problèmes et excercices d'electrotechnique générale. Moscou. Editions MIR 1980.

10. Doncescu D. - Studiul actual al metodelor teoretice şi experimentale privind determinarea cîmpurilor magnetice în regim deformant. Referat doctorat, I.P.B., 1978.

CUPRINS

Pag.

CAP. 1 Introducere 5

1.1. Noţiuni de calcul vectorial 6

1.2. Simbolurile mărimilor fizice 9

CAP. 2 Electrostatica 11

2.1. Fenomene electrice. Sarcina electrică. Cîmp electric. Intensitatea cîmpului electric în vid 11
2.1.1. Conductori, semiconductori, izolanţi 14
2.1.2. Formula lui Coulomb 14

2.1.3. Cîmpul electric al unei sarcini electrice punctuale 15

2.1.4. Unităţi de măsură 17

2.2. Tensiunea şi potenţialul electric 17

2.2.1. Unităţi de măsură 21

2.2.2. Aplicaţii 22

2.3. Cîmpul electrostatic în vid al unor repartiţii de sarcini. Superpoziţia 25

2.3.1. Aplicaţie 27

2.4. Cîmpul electrostatic în conductoare 28

2.5. Cîmpul electric în substanţă 32

2.5.1. Dielectricii nepolari 32

2.5.2. Dielectricii polari 35

2.6. Intensitatea cîmpului electric în interiorul corpurilor polarizate. Inducţia electrică 37

2.6.1. Polarizarea electrică temporară 39

2.7. Fluxul electric 40

Pag.

2.8. Condensatoare electrice 41
2.8.1. Teorema capacităţii electrice 43
2.8.2. Capacitatea condensatorului plan 43
2.8.3. Capacităţi echivalente. Condensatoare legate în serie şi condensatoare legate în paralel 45

CAP. 3 Electrocinetica 49

3.1. Starea electrocinetică. Intensitatea curentului de conducţie 49
3.2. Densitatea curentului electric de conducţie 51
3.3. Natura fizică a curentului electric de conducţie 53
3.4. Curentul electric în semiconductoare 53
3.5. Curentul electric în vid 57
3.6. Curentul electric în gaze 59
3.7. Curentul electric în electroliţi 60
3.8. Cîmpuri electrice imprimate 62
3.8.1. Cîmpuri electrice imprimate de acceleraţie 64
3.8.2. Cîmpuri electrice imprimate de natură termică 65
3.8.3. Cîmpuri electrice imprimate de concentraţie 65
3.8.4. Cîmpuri electrice imprimate de contact voltaice 66
3.8.5. Cîmpuri electrice imprimate de contact termice 66
3.8.6. Cîmpuri electrice imprimate de contact galvanice 68
3.8.7. Elemente galvanice primare (pile electrice). Pila Volta. Pila Daniel. Pila Leclanché 70
3.8.8. Elemente galvanice secundare (acumulatoare). Acumulatoare cu plumb. Acumulatoare alcaline 72
3.9. Generatorul electric (sursa electrică). Tensiunea electromotoare 74
3.10. Legile electrocineticii 77
3.10.1. Legea de conservare a sarcinii electrice 77
3.10.2. Legea conducţiei electrice 80

Pag.

3.10.3. Legea transformării energiei în conductoare parcurse de curenţi electrici.(Legea Joule-Lenz) 89

3.10.4. Aplicaţii în tehnică ale efectului electrocaloric 94

3.11. Circuite de curent continuu 96

3.11.1. Rezistorul ideal 97

3.11.2. Sursa ideală de tensiune 99

3.11.3. Sursa ideală de curent 100

3.11.4. Sursa reală de tensiune 101

3.11.5. Sursa reală de curent 102

3.11.6. Echivalenţa surselor electrice 104

3.11.7. Legarea surselor electrice ideale 105

3.12. Elementele topologice ale circuitelor de curent continuu 107

3.13. Teoremele lui Kirchhoff pentru circuite de curent continuu 109

3.13.1. Teorema întîi a lui Kirchhoff 109

3.13.2. Teorema a doua a lui Kirchhoff 111

3.14. Puteri în circuite de curent continuu 114

3.15. Teorema transferului maxim de putere 116

3.16. Metode de rezolvare a circuitelor liniare de curent continuu 119

3.16.1. Metoda teoremelor lui Kirchhoff 121

3.16.2. Metoda superpoziţiei 129

3.16.3. Metoda curenţilor ciclici 132

3.16.4. Metoda tensiunilor la noduri 142

3.17. Metode de simplificare a circuitelor electrice 154

3.17.1. Metoda rezistenţelor echivalente 154

3.17.2. Legarea în serie a rezistoarelor. Divizorul de tensiune 155

3.17.3. Legarea în paralel a rezistoarelor. Divizorul de curent 157

3.17.4. Teorema lui Vaschy 161

Pag.

3.18. Metode de rezolvare parţială a unui circuit de curent continuu 164

3.18.1. Metoda generatorului echivalent de tensiune 164

3.18.2. Metoda generatorului echivalent de curent 170

3.19. Circuite neliniare de curent continuu 174

3.19.1. Calculul circuitelor cu elemente neliniare 180

3.19.2. Legarea în serie 180

3.19.3. Legarea în serie a unui rezistor neliniar cu o sursă 181

3.19.4. Echivalarea unui element neliniar cu elemente liniare de circuit 183

3.19.5. Legarea în paralel 184

3.19.6. Aplicaţie 184

CAP. 4 Electrodinamica 189

4.1. Cîmpul magnetic în vid 189

4.1.1. Linia de cîmp magnetic 191

4.1.2. Fluxul magnetic 192

4.2. Forţe în cîmp magnetic 194

4.2.1. Forţa lui Lorentz (Forţa magnetică). Aplicaţie 194

4.2.2. Forţa lui Laplace (Forţa electromagnetică) 197

4.2.3. Forţa lui Ampère (Forţa electrodinamică). Aplicaţie 199

4.3. Formula lui Biot-Savart 201

4.4. Intensitatea cîmpului magnetic. Aplicaţie 202

4.5. Tensiunea magnetomotoare. Solenaţia. Aplicaţii 203

4.6. Cîmpul magnetic în corpuri 207

4.6.1. Magnetizarea temporară şi permanentă 208

4.6.2. Interpretarea microscopică a magnetizaţiei 210

Pag.

4.6.3. Intensitatea cîmpului magnetic şi inducţia magnetică în interiorul corpurilor 212

4.6.4. Fluxul magnetic în corpuri introduse în cîmp magnetic. Legea fluxului magnetic. Aplicaţii 214

4.6.5. Fluxul magnetic dintr-o bobină 216

4.6.6. Feromagnetismul 217

4.6.7. Materiale feromagnetice moi 219

4.6.8. Materiale feromagnetice dure 220

4.6.9. Materiale ferimagnetice 220

4.7. Circuite magnetice 221

4.7.1. Reluctanţa magnetică 221

4.7.2. Legea lui Ohm pentru o latură de circuit magnetic 223

4.7.3. Legea lui Ohm pentru un circuit magnetic închis. Aplicaţie 223

4.7.4. Teoremele lui Kirchhoff pentru circuite magnetice. Aplicaţie 225

4.7.5. Analogia cu circuitele electrice. Aplicaţie 227

4.7.6. Calculul circuitelor magnetice. Calculul geometriei circuitelor magnetice. Calculul solenaţiilor. Calculul inducţiei magnetice în întrefier. Aplicaţie 229

4.8. Bobine electrice 235

4.8.1. Inductivitatea unei bobine. Aplicaţii 236

4.8.2. Inductivităţi proprii şi mutuale 240

4.8.3. Coeficient de cuplaj. Aplicaţii 241

4.9. Legea inducţiei electromagnetice 244

4.9.1. Regula lui Lenz 247

4.9.2. Inducţia magnetică prin transformare 247

4.9.3. Inducţia magnetică prin mişcare 249

4.9.4. Aplicaţie 251

4.10. Curenţii turbionari 255

Pag.

4.11. Efectul Hall 256

4.12. Energia din cîmpul magnetic 257

4.13. Densitatea de volum a energiei magnetice 261

4.14. Forţa în cîmpul magnetic. Aplicaţie 263

CAP. 5 Curentul alternativ sinusoidal 268

5.1. Generarea tensiunii electromotoare alternative sinusoidale. Curentul alternativ sinusoidal 269

5.1.1. Mărime periodică. Perioadă. Frecvenţă. Pulsaţie 272

5.1.2. Valoare medie. Mărime alternativă. Valoare efectivă. Aplicaţii 274

5.1.3. Caracteristicile mărimilor sinusoidale. Aplicaţii 282

5.1.4. Precizări în legătură cu caracteristicile mărimilor sinusoidale 290

5.2. Reprezentarea mărimilor sinusoidale 290

5.2.1. Reprezentarea în instantaneu 291

5.2.2. Reprezentarea carteziană 291

5.2.3. Reprezentarea în complex . Aplicaţii 292

5.3. Elemente ideale de circuit în regim sinusoidal 301

5.3.1. Elemente de circuit pasive. Aplicaţii 302

5.3.2. Elemente de circuit active 318

5.4. Circuite simple în regim sinusoidal 320

5.4.1. Impedanţa. Admitanţa. Aplicaţie 320

5.5. Circuite serie şi paralel 323

5.5.1. Circuitul RL serie 323

5.5.2. Circuitul RC serie 328

5.5.3. Circuitul RLC serie 332

5.5.4. Circuitul RLC paralel 336

Pag.

5.6. Rezonanţa în circuite electrice de curent alternativ sinusoidal 339

5.6.1. Rezonanţa serie 340

5.6.2. Rezonanţa paralel 347

5.6.3. Rezonanţa multiplă 353

5.6.4. Ferorezonanţa 354

5.7. Puterea în curent alternativ sinusoidal 358

5.7.1. Puterea activă. Puterea reactivă. Puterea aparentă 364

5.7.2. Reprezentarea puterilor în complex. Aplicaţii 370

5.7.3. Transferul maxim de putere activă 379

5.7.4. Teorema conservării puterilor complexe în circuite de curent alternativ sinusoidal 382

5.8. Metode de rezolvare a circuitelor electrice liniare de curent alternativ sinusoidal 384

5.8.1. Metoda legii lui Ohm 385

5.8.2. Metoda impedanţelor echivalente. Aplicaţie 387

5.8.3. Metoda teoremelor lui Kirchhoff. Aplicaţie 393

5.8.4. Metoda superpoziţiei 399

5.8.5. Metoda curenţilor ciclici. Aplicaţie 399

5.8.6. Metoda potenţialelor la noduri. Aplicaţie 402

5.8.7. Metoda generatoarelor echivalente. Aplicaţie 407

CAP. 6 Regimul tranzitoriu în circuitele electrice 413

6.1. Circuitul RL 415

6.2. Circuitul RC 418

6.3. Circuitul R 422

6.4. Aplicaţii 424

CAP. 7 Circuite neliniare în regim sinusoidal 434

7.1. Rezistorul neliniar 434

7.2. Dioda semiconductoare 434

Pag.

7.3. Redresorul electric 436
7.4. Bobina neliniară 442
7.5. Condensatorul neliniar 445

CAP. 8 Scheme echivalente a elementelor neliniare pentru semnal mic 448

8.1. Schema echivalentă a diodei pentru semnal mic şi joasă frecvenţă 450
8.2. Schema echivalentă a tranzistorului pentru semnal mic şi joasă frecvenţă 455

CAP. 9 Linii electrice lungi 467

9.1. Fenomene pe linii electrice lungi 468
9.2. Linii electrice lungi cu pierderi 471
9.3. Aplicaţie 471

CAP.10 Unde electromagnetice 479

10.1. Propagarea cîmpului electromagnetic 481
10.2. Generarea undelor electromagnetice 484